



Research Article

Received: November 10, 2022

Accepted: November 16, 2022

Published: November 24, 2022

ISSN 2658-5553

# The V.I. Slivker's semi-shear theory finite elements research for calculation of thin-walled closed profile rods

Rybakov, Vladimir Alexandrovich<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup> Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation;  
[fishermanoff@mail.ru](mailto:fishermanoff@mail.ru)

Correspondence:\* email [fishermanoff@mail.ru](mailto:fishermanoff@mail.ru); contact phone [+79118297767](tel:+79118297767)

## Keywords:

Warping; Shear deformation; Bimoment; Stiffness matrix; Thin-walled closed profile; Thin-walled closed rods; Lightweight gauge steel structures; bending torsion; The influence parameter of thin-walled profile shape; Semi-shear theory

## Abstract:

**The object of research** is the finite element (FE) proposed earlier by the author of the article as part of the theory of V.I.Slivker's semi-shear theory, which differs from other FE by the approximation method of unknown functions: 3-nodal finite element having 6 degrees of freedom square-law approximation of torsional angle functions and warping functions. **The subject of research** is the convergence for the considered FE of displacements functions of both types (torsional angle and warping) and internal forces (bimoment, sectorial torsion moment and pure torsion moment) that occur during bending torsion and are the important components for calculating stresses according to the standards. **Method of research** is mathematical modeling of parameters (stiffness matrix, load column) and determination of the unknowns of equations of the FE-method. **Results.** The test problems of thin-walled rods bending torsion for a number of boundary conditions are solved on the example of a closed profile; the main advantage of V.I.Slivker's theory (universality for open and closed profiles) and, as a consequence, the advantage of the previously proposed finite elements are demonstrated on concrete examples. It is shown that the FE with quadratic approximation has the convergence acceptable for engineering calculations for rods of not only open, but also closed profiles. Also obtained in the V.I.Slivker's semi-shear theory the expression for the influence parameter of thin-walled rectangular profiles shape is created and the spectrum of its values is investigated.

## 1 Introduction

В XXI веке во всем мире наблюдается увеличение темпов применения металлоконструкций в промышленном и гражданском строительстве. Особое место в строительной индустрии занимают легкие стальные тонкостенные конструкции (ЛСТК), имеющие ряд технологических и эксплуатационных достоинств (легкость, быстровозводимость и т.д.) [1],[2] и др.

Теории расчета обычных (толщиной, как правило, более 4 мм) конструкций оказываются неприменимы к тонкостенным ввиду малой толщины профилей.

Для повседневного решения инженерных задач расчета элементов тонкостенных конструкций можно выделить принципиально 2 группы способов расчета: основанные на оболочечном моделировании и на стержневом.

Первая группа связана с представлением тонкостенного стержня в виде оболочки и дальнейшим численным расчетом, как правило, с помощью метода конечных элементов, в программных комплексах SCAD, Lira, SOFiSTiK и т.д.[3]-[7] и др.. Такие способы расчета являются достаточно точными, но весьма трудоемкими в инженерно-конструкторской деятельности, особенно с точки зрения комплексного расчета конструкции.

Rybakov V.

The V.I. Slivker's semi-shear theory finite elements research for calculation of thin-walled closed profile bar systems; 2022; *AlfaBuild*; 24 Article No 2403. doi: 10.57728/ALF.24.3



Во второй группе способов можно выделить аналитические и численные методы расчета тонкостенных стержней, связанные с введением дополнительной «седьмой» степени свободы.

Как отмечалось ранее в [8],[9], известные и давно широко применимые на практике аналитические методы решения [10]–[13] и др., как правило, являются трудоемкими для повседневного применения ввиду сложности математических уравнений и функций, и возникает необходимость использования численных методов расчета, например, метода конечных элементов (МКЭ).

В работах Туснина А.Р. [14]–[17] и др. предлагается так называемый метод тонкостенных конечных элементов, при анализе которого ранее в [18],[19] и др. было отмечено следующее:

1. безразмерные коэффициенты  $\mu, g, \alpha, \lambda$  при компонентах матриц жесткости являются отношением гиперболических функций, например,

$$\mu = \frac{kl(kl \operatorname{ch}(kl) - \operatorname{sh}(kl))}{kl \operatorname{sh}(kl) - 2 \operatorname{ch}(kl) + 2}, \quad (1)$$

знаменатель которых при определенных значениях параметров может быть вырожден;

2. не решена задача учета деформаций сдвига при кручении в тонкостенных стержнях. Принимаемое в теории В.З. Власова [10] допущение о равенстве нулю угла сдвига  $\gamma_\omega = 0$ , автоматически влечет за собой зависимость между углом закручивания  $\theta(x)$  и мерой депланации  $\beta(x)$ :

$$\theta' = \beta; \quad (2)$$

3. метод тонкостенных конечных элементов неприменим для расчета тонкостенных стержней замкнутого профиля (коробчатый, составной и др.).

Следует отметить, что в инженерной практике бимомент является важной характеристикой, поскольку он напрямую влияет на нормальные напряжения. В СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции» [20], бимомент как силовой фактор фигурирует наравне с остальными силовыми факторами, о чем свидетельствует в данном СП формула (43) для поперечно-изгибаемых элементов при действии моментов в двух главных плоскостях и при наличии бимомента:

$$\frac{M_x}{I_{xn} R_y \gamma_c} y \pm \frac{M_y}{I_{yn} R_y \gamma_c} x \pm \frac{B_\omega}{I_{\omega n} R_y \gamma_c} \omega \leq 1 \quad (3)$$

Формулы СП 16.13330.2016 [20] под номерами (53) – прочность при изгибе в плоскости наибольшей жесткости и стесненном кручении симметричных двутавров; (70) – устойчивость при изгибе в двух главных плоскостях и наличии бимомента; (105) и (106) – прочность внецентренно сжатых внецентренно растянутых элементов, – по своей сути являются модификацией формулы (3), приведенной выше.

В нормах по проектированию ЛСТК – СП 260.13330.2016 «Конструкции стальные тонкостенные из холодногнутых оцинкованных профилей и гофрированных листов» [21], – в первой бимомент как силовой фактор в прямом виде не упоминается. Однако несмотря на то, что авторы изменения №2 от 10.08.2021 канд. техн. наук В.Ф.Беляев, С.И.Бочкова, Д.Е.Голубев, В.В.Косенков, А.В.Шуринов сделали оговорку, состоящую в том, что все формулы для расчета прочности и устойчивости применимы при соблюдении сформулированного условия: конструктивный элемент не подвержен свободному или стесненному кручению либо надежно раскреплен по своей длине от кручения и влияния изгибно-крутящего бимомента  $B$ , бимомент и секториальный крутящий момент косвенно фигурируют в определении величин напряжений. При действии в сечении элемента крутящего момента или изгибно-крутящего бимомента и отсутствии надежного его раскрепления от кручения расчет поперечного сечения по прочности следует выполнять в соответствии с формулами (7.75) и (7.85):

$$\sigma_{tot,r} = \sigma_{N,r} + \sigma_{My,r} + \sigma_{Mx,r} + \sigma_{w,r} \quad (4)$$

$$\tau_{tot,r} = \tau_{Qy,r} + \tau_{Qx,r} + \tau_{t,r} + \tau_{w,r} \quad (5)$$

в которых  $\sigma_{N,r}, \sigma_{My,r}, \sigma_{Mx,r}, \sigma_{w,r}$  – составляющие нормальных напряжений от продольной силы, изгибающих моментов в двух плоскостях и бимомента, соответственно;  $\tau_{Qy,r}, \tau_{Qx,r}, \tau_{t,r}, \tau_{w,r}$  – составляющие касательных напряжений от двух продольных сил, момента чистого и стесненного кручения, соответственно.

Rybakov V.

The V.I. Slivker's semi-shear theory finite elements research for calculation of thin-walled closed profile bar systems; 2022; *AlfaBuild*; 24 Article No 2403. doi: 10.57728/ALF.24.3

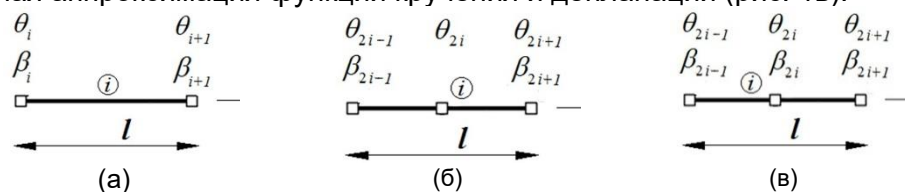
При этом согласно теоретическим и экспериментальным исследованиям [10],[17],[8],[22], в тонкостенных конструкциях, находящихся в условиях изгибного кручения, составляющая нормальных напряжений от бимоента может значительно превышать составляющую от изгибающего момента, а влияние касательных напряжений на напряженно-деформированное состояние мало по сравнению с влиянием нормальных напряжений.

Поэтому, с учетом того, что бимомент является производной некоторого порядка от функций перемещений, в данной статье рассмотрим различные способы аппроксимаций функций перемещений, влияющих на точность вычисления бимоента.

**Целью данной работы** является реализация метода конечных элементов по полусдвиговой теории В.И.Сливкера для расчета тонкостенных стержней замкнутого профиля в условиях стесненного кручения.

Ранее автором в [23],[19] были построены и в [18] исследованы для профилей открытого типа 3 типа конечных элементов (рис. 1), соответствующих разным теориям стесненного кручения и количеством степеней свободы, зависящим от способа аппроксимации:

1. линейная аппроксимация функций кручения и депланации (рис. 1а);
2. квадратичная аппроксимация функции кручения и линейная аппроксимация функции депланации (рис. 1б);
3. квадратичная аппроксимация функций кручения и депланации (рис. 1в).



**Рис. 1 - Конечные элементы по полусдвиговой теории: с четырьмя, с пятью и с шестью степенями свободы**

**Fig. 1 - Finite elements according to semi-shear theory: with four, five and six degrees of freedom**

Предложенные матрицы жесткости являются универсальными в применении при расчетах методом конечных элементов как тонкостенных стержней открытого профиля (на основе теорий В.З. Власова [10] и В.И. Сливкера [24]), так и закрытого профиля (на основе теорий А.А. Уманского [13] и Пановко-Джанелидзе [25]), ввиду схожести соответствующих дифференциальных уравнений кручения и функционалов энергии деформации.

На примерах тонкостенных стержней замкнутого (швеллерового) профиля ранее в [18] было показано, что оптимальной для инженерных расчетов скоростью сходимости обладает конечный элемент с квадратичной аппроксимацией функций кручения и депланации (рис. 1в) – с точки зрения поиска внутренних усилий, возникающих при стесненном кручении (бимомент, секториальный крутящий момент и момент чистого кручения). Именно такой конечный элемент и будет являться **объектом исследования** в данной работе.

Продолжим численные исследования данного конечного элемента и рассмотрим некоторые тестовые задачи о стесненном кручении тонкостенного стержня, но уже на примере замкнутого профиля, продемонстрировав главное достоинство теории В.И.Сливкера [24] – универсальность ее применения как для открытых, так и замкнутых профилей, – и как следствие – универсальность предложенного ранее конечных элементов. Данные задачи рассмотрим с точки зрения поиска не только самих функций неизвестных перемещений, но и статических внутренних силовых факторов при стесненном кручении, являющихся основными компонентами для вычисления напряжений по формулам (4) - (5). Сходимость для данного КЭ функций данных видов перемещений и силовых факторов будет являться **предметом исследования**.

## 2 Materials and Methods

Напомним, что отличительной особенностью функционала энергии деформации тонкостенного стержня (2) для полусдвиговой теории [24], является то, что функции кручения  $\theta(x)$  и депланации  $\beta(x)$  представляются как независимые функции:

$$E(\theta, \beta) = \frac{1}{2} \int_0^l (EI_{\sigma} (\beta')^2 + GI_t (\theta')^2 + GI_t \frac{(\theta' - \beta)^2}{\psi - 1}) dx, \quad (6)$$

где  $E$  и  $G$  –соответственно модули упругости и сдвига

В функционале вводится третье слагаемое – так называемая «сдвиго-депланационная» часть, зависящая от параметра  $\psi$ , определяемого на основе коэффициента влияния формы сечения  $\mu_{\omega\omega}$ , о которых далее пойдет речь:

$$\psi = 1 + \frac{\mu_{\omega\omega} I_r}{I_r}, \quad \mu_{\omega\omega} = \frac{I_r}{I_{\omega}^2} \oint \frac{\overline{S_{o\omega}}^2}{\delta} ds \tag{7}$$

где:  $\delta$  - толщина профиля;  $s$  - дуговая (полярная) координата (рис. 3(2));  $I_r$  - полярный момент инерции:

$$I_r = \int_{(A)} (y^2 + z^2) dA; \tag{8}$$

$I_{\omega}$  - секториальный момент инерции:

$$I_{\omega} = \oint \delta \varpi^2 ds; \tag{9}$$

$I_1$  - момент инерции при свободном кручении.

$\overline{S_{o\omega}}$ ,  $\overline{S_{o\omega}}$  и  $S_{o\omega}$  - секториальные статические моменты сечения:

$$\overline{\overline{S_{o\omega}}} = \overline{S_{o\omega}} - \frac{I_{\omega}}{\Omega}; \quad \overline{S_{o\omega}} = S_{o\omega} - \frac{1}{\Omega} \oint S_{o\omega} \rho ds; \quad S_{o\omega} = \int_0^s \varpi \delta ds; \tag{10}$$

$\varpi$  – обобщенная секториальная координата

$$\varpi(s) = \omega_0 - \alpha(s), \tag{11}$$

$\omega_0$  – константа для сечения, выражаемая формулой

$$\omega_0 = \frac{1}{A} \oint \alpha \delta ds. \tag{12}$$

$\alpha(s)$  – функция депланации, зависящая от выбора положения полюса  $P$  и от выбора точки  $O$  начала отсчета дуговой координаты  $s$  на профиле:

$$\alpha(s) = \frac{I_x}{\Omega} \int_0^s \frac{ds}{\delta} - \omega \tag{13}$$

$\Omega$  – полная секториальная координата, определяемая по формуле:

$$\Omega = \omega(l); \tag{14}$$

$\omega$  - секториальная координата:

$$\omega(s) = \int_{s(\Gamma)}^s r ds; \tag{15}$$

При этом обобщенная секториальная координата не зависит от выбора точки начала отсчета дуговой координаты  $s$ .

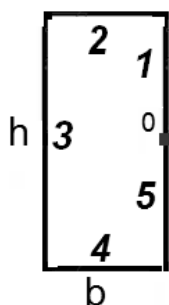


Рис. 2 - Параметры прямоугольного замкнутого профиля

Fig. 2 - Rectangular closed profile parameters

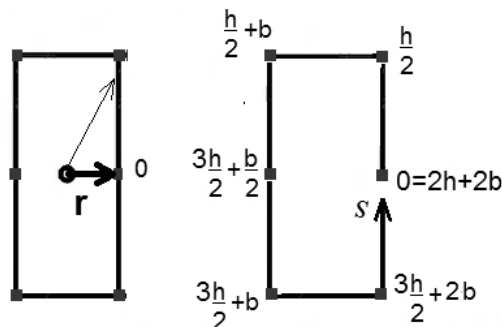


Рис. 3 – Дуговые координаты

Fig. 3 – The angular coordinates



Как видно из формул (7)...(15), процесс вычисления коэффициента влияния формы и, соответственно, параметра  $\psi$ , достаточно трудоемкий. Рассмотрим это на примере прямоугольного сечения (рис. 2).

Определим обобщенную секториальную координату  $\omega(s)$  по сечению замкнутого прямоугольного профиля и функцию статического секториального момента.

Секториальная координата  $\omega(s)$  определяется по формуле (15), при этом начало координат принято в точке  $O$ , а отсчет дуговой координаты  $s$  идет против часовой стрелки (рис. 3). Выражения для функций  $\omega(s)$  представлены в 3-ем столбце табл. 1.

**Таблица 1. Вычисление функции обобщенных секториальных координат**  
**Table 1. Calculation of the generic sectorial coordinates function**

№ участка	Границы участка	Формула для вычисления $\omega(s)$	Значение интегралов $\int_l^{(i)} \omega(s) ds$	Формула для вычисления константы $\omega(s)$
1	$0 \leq s \leq \frac{h}{2}$	$\omega(s) = \frac{1}{2}bs$	$\frac{1}{16}bh^2$	$\frac{1}{2}bs - \frac{bh}{b+h}s$
2	$\frac{h}{2} \leq s \leq \frac{h}{2} + b$	$\omega(s) = \frac{1}{4}bh + \frac{h}{2}(s - \frac{h}{2})$	$\frac{1}{2}b^2h$	$\frac{1}{4}bh + \frac{h}{2}(s - \frac{h}{2}) - \frac{bh}{b+h}s$
3	$\frac{h}{2} + b \leq s \leq \frac{3h}{2} + b$	$\omega(s) = \frac{3bh}{4} + \frac{b}{2}(s - b - \frac{h}{2})$	$bh^2$	$\frac{3bh}{4} + \frac{b}{2}(s - b - \frac{h}{2}) - \frac{bh}{b+h}s$
4	$\frac{3h}{2} + b \leq s \leq \frac{3h}{2} + 2b$	$\omega(s) = \frac{5bh}{4} + \frac{h}{2}(s - b - \frac{3h}{2})$	$\frac{3}{2}b^2h$	$\frac{5bh}{4} + \frac{h}{2}(s - b - \frac{3h}{2}) - \frac{bh}{b+h}s$
5	$\frac{3h}{2} + 2b \leq s \leq 2h + 2b$	$\omega(s) = \frac{7bh}{4} + \frac{b}{2}(s - 2b - \frac{3h}{2})$	$\frac{15}{16}bh^2$	$\frac{7bh}{4} + \frac{b}{2}(s - 2b - \frac{3h}{2}) - \frac{bh}{b+h}s$

Полная секториальная координата определяется по формуле (14) с использованием формулы для секториальной координаты на 5-ом участке

$$\Omega = \omega(2h + 2b) = 2bh. \quad (16)$$

Момент инерции при свободном кручении вычислим по [25], с.129:

$$I_t = \frac{2b^2h^2\delta}{b+h}. \quad (17)$$

Определим функцию депланации по формуле (13), подставив (16) и (17), вынеся толщину  $\delta$  за знак интеграла как постоянную величину и сократив выражение:

$$\alpha(s) = \frac{bh}{b+h} \int_0^s ds - \omega(s). \quad (18)$$

С учетом того, что  $\int_0^s ds = s$ :

$$\alpha(s) = \frac{bh}{b+h} s - \omega(s). \quad (19)$$

Далее определим константу  $\omega_0$  (начальную секториальную координату) путем интегрирования по участкам. С учетом (19), преобразуем (12):

$$\omega_0 = \frac{\delta}{A} \oint \left( \frac{bh}{b+h} s - \omega(s) \right) ds = \frac{\delta}{A} \left( \int_0^{2h+2b} \frac{bh}{b+h} s ds - \oint \omega(s) ds \right). \quad (20)$$

Как видно из 4-го столбца табл. 1, суммарный интеграл составит

$$\oint \omega(s) ds = 2bh(b+h). \quad (21)$$

Окончательно имеем  $\omega_0 = 0$

Таким образом, согласно формуле (11), функция обобщенной секториальной координаты запишется как

$$\varpi(s) = -\alpha(x) = \omega(s) - \frac{bh}{b+h} s. \tag{22}$$

Подставляя  $s$  переменные в формулы 5-го столбца табл.1, получим значения обобщенных секториальных координат в характерных точках:

$$\varpi(0) = \varpi\left(\frac{h}{2} + \frac{b}{2}\right) = \varpi(h+b) = \varpi\left(\frac{3h}{2} + \frac{3b}{2}\right) = \varpi(2h+2b) = 0. \tag{23}$$

$$\varpi\left(\frac{h}{2}\right) = \varpi\left(\frac{3h}{2} + b\right) = \frac{bh(b-h)}{4(h+b)} \tag{24}$$

$$\varpi\left(\frac{h}{2} + b\right) = \varpi\left(\frac{3h}{2} + 2b\right) = \frac{bh(h-b)}{4(h+b)} \tag{25}$$

Эпюра обобщенных секториальных координат представлена на рис. 4.

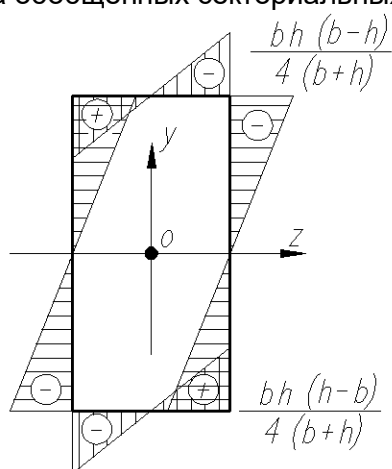


Рис. 4 - Эпюра обобщенных секториальных координат  
Fig. 4 - Generic sectorial coordinates diagram

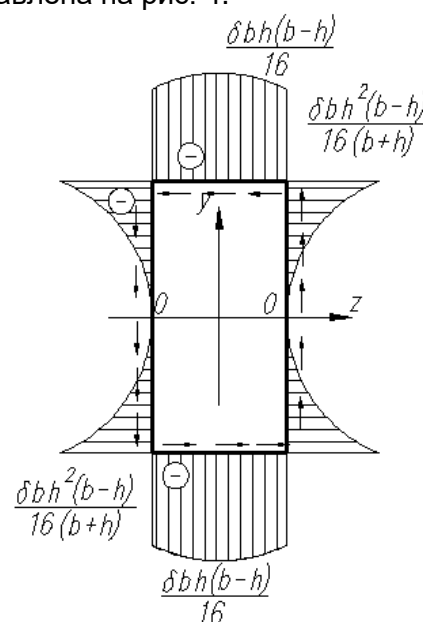


Рис. 5 - Эпюра секториального статического момента  $S_{o\varpi}$   
Fig. 5 - Sectorial static moment diagram  $S_{o\varpi}$

Подставляя  $s$  переменные в формулы 2-го столбца табл.2, получим значения секториального статического момента в характерных точках (рис. 5).

Далее вычислим интеграл  $\oint S_{o\varpi} \rho ds$ :

$$\frac{1}{\Omega} \oint S_{o\varpi} \rho ds = \frac{\delta bh}{48(b+h)} (b^2 - 2h^2 + bh). \tag{26}$$

С учетом данной поправки вычислим значения приведенного секториального статического момента в точках по формуле (10), рис.6а.

Поправку при  $\overline{S_{o\varpi}}(s)$  обозначим за  $W$  и вычислим, подставив в нее (26) и (16):

$$W = \frac{1}{\Omega} \oint S_{o\varpi} \rho ds + \frac{I_{\varpi}}{\Omega} = \frac{\delta bh}{48(b+h)} (2b^2 - h^2 - bh). \tag{27}$$

Окончательно вторая дополнительная функция для секториального статического момента:

$$\overline{S_{o\varpi}}(s) = S_{o\varpi} - W, \tag{28}$$

значения которой вычислены по точкам и указаны на эпюре рис. 6б.

Таблица 2. Вычисление функции секториального статического момента  
Table 2. Calculation of the sectorial static moment diagram

№ уч-ка	Значение функции секториального статич. момента $S_{o\sigma}(s)$	Значение $\rho$	Значение интегралов $\int_l^{(i)} S_{o\sigma} \rho ds$	Формулы для постоянных интегрирования
1	$\delta(\frac{1}{4}bs^2 - \frac{bh}{2(b+h)}s^2)$	$\frac{1}{2}b$	$\frac{bh^3}{96}$	$a_1 = \delta(\frac{b}{4} - \frac{bh}{2(b+h)});$ $b_1 = 0;$
2	$S_{o\sigma}(\frac{h}{2}) + \delta(\frac{1}{4}bhs + \frac{h}{4}s^2 - \frac{h^2s}{4} - \frac{bh}{2(b+h)}s^2) - \delta(\frac{1}{8}bh^2 + \frac{h^3}{16} - \frac{h^3}{8} - \frac{bh^3}{8(b+h)})$	$\frac{1}{2}h$	$\frac{5b^3h}{24} - \frac{3bh^3}{16}$	$a_2 = \delta(\frac{h}{4} - \frac{bh}{2(b+h)});$ $b_2 = \delta\frac{h}{4}(b-h);$ $c_2 = -\delta(\frac{1}{8}bh^2 + \frac{h^3}{16} - \frac{h^3}{8} - \frac{bh^3}{8(b+h)}) - W$
3	$S_{o\sigma}(\frac{h}{2} + b) + \delta(\frac{bhs}{2} + \frac{bs^2}{4} - \frac{b^2s}{2} - \frac{bh}{2(b+h)}s^2) - \delta(\frac{bh(\frac{h}{2} + b)}{2} + \frac{b(\frac{h}{2} + b)^2}{4} - \frac{b^2(\frac{h}{2} + b)}{2} - \frac{bh}{2(b+h)}(\frac{h}{2} + b)^2)$	$\frac{1}{2}b$	$-\frac{b^3h}{4} + \frac{b^2h^2}{2} + \frac{74bh^3}{96}$	$a_3 = \delta(\frac{b}{4} - \frac{bh}{2(b+h)});$ $b_3 = \delta\frac{b}{2}(h-b);$ $c_3 = -\delta(\frac{bh(\frac{h}{2} + b)}{2} + \frac{b(\frac{h}{2} + b)^2}{4} - \frac{b^2(\frac{h}{2} + b)}{2} - \frac{bh}{2(b+h)}(\frac{h}{2} + b)^2)$
4	$S_{o\sigma}(\frac{3h}{2} + b) + \delta(\frac{3bhs}{4} + \frac{hs^2}{4} - \frac{3h^2s}{4} - \frac{bh}{2(b+h)}s^2) - \delta(\frac{3bh}{4}(\frac{3h}{2} + b) + \frac{h}{4}(\frac{3h}{2} + b)^2 - \frac{3h^2}{4}(\frac{3h}{2} + b) - \frac{bh(\frac{3h}{2} + b)^2}{2(b+h)})$	$\frac{1}{2}h$	$\frac{41b^3h}{24} - \frac{9bh^3}{16} + \frac{9b^2h^2}{8}$	$a_4 = \delta(\frac{h}{4} - \frac{bh}{2(b+h)});$ $b_4 = \delta\frac{3h}{4}(b-h);$ $c_4 = -\delta(\frac{3bh}{4}(\frac{3h}{2} + b) + \frac{h}{4}(\frac{3h}{2} + b)^2 - \frac{3h^2}{4}(\frac{3h}{2} + b) - \frac{bh(\frac{3h}{2} + b)^2}{2(b+h)})$
5	$S_{o\sigma}(\frac{3h}{2} + 2b) + \delta(bhs - b^2s + \frac{bs^2}{4} - \frac{bh}{2(b+h)}s^2) - \delta(bh(\frac{3h}{2} + 2b) - b^2(\frac{3h}{2} + 2b) + \frac{b(\frac{3h}{2} + 2b)^2}{4} - \frac{bh}{2(b+h)}(\frac{3h}{2} + 2b)^2)$	$\frac{1}{2}b$	$-\frac{b^3h}{2} + b^2h^2 + \frac{121bh^3}{96}$	$a_5 = \delta(\frac{b}{4} - \frac{bh}{2(b+h)});$ $b_5 = \delta b(h-b);$ $c_5 = -\delta(bh(\frac{3h}{2} + 2b) - b^2(\frac{3h}{2} + 2b) + \frac{b(\frac{3h}{2} + 2b)^2}{4} - \frac{bh}{2(b+h)}(\frac{3h}{2} + 2b)^2)$

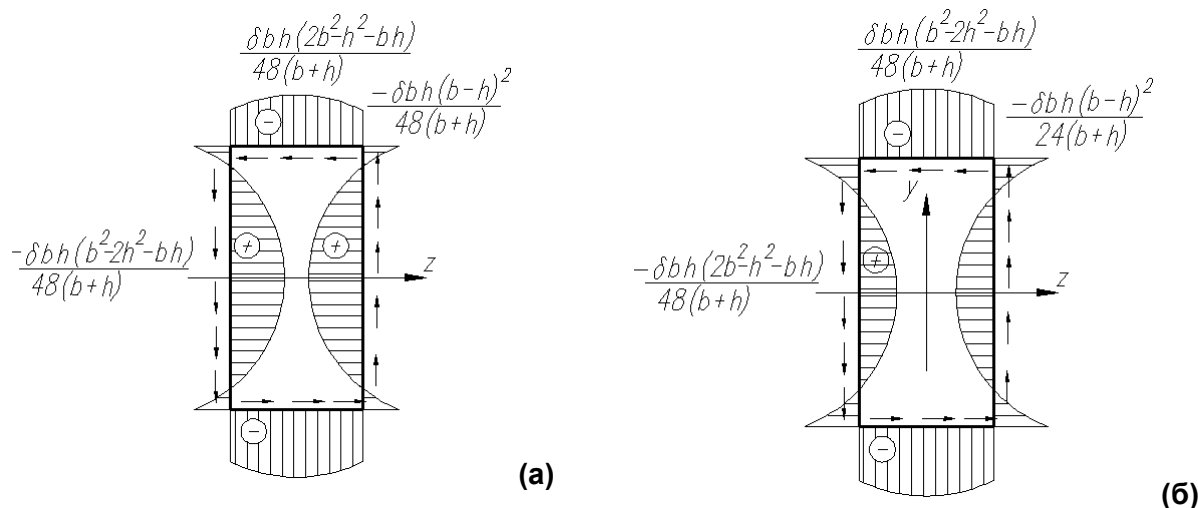


Рис. 6 - Графики обобщенных секториальных статических моментов (а -  $\overline{S_{ow}}(s)$ , б -  $\overline{\overline{S_{ow}}}(s)$ )

Fig. 4 – Diagram of generic sectorial static moments (а -  $\overline{S_{ow}}(s)$ , б -  $\overline{\overline{S_{ow}}}(s)$ )

Для вычисления квадрата функции обобщенного секториального статического момента и интеграла для коэффициента  $\mu_{ow}$  (7) введем следующие обозначения постоянных  $a_i, b_i, c_i$  (где  $i$  - номер участка) и запишем значения по участкам:

$$\overline{\overline{S_{ow}}}(s) = a_i s^2 + b_i s + c_i \tag{29}$$

Тогда значение интеграла составит на каждом участке:

$$\int_{(i)}^i \frac{S_{ow}^2}{\delta} ds = \int_{(i)}^i \frac{(a_i s^2 + b_i s + c_i)^2}{\delta} ds = \frac{1}{\delta} \left( \frac{a_i^2}{5} s^5 + \frac{a_i b_i}{2} s^4 + \frac{(b_i^2 + 2a_i c_i)}{3} s^3 + b_i c_i s^2 + c_i^2 s \right) \Big|_{(i)}^i \tag{30}$$

Нетрудно доказать, что

$$\int_0^{\frac{h}{2}} \frac{S_{ow}^2}{\delta} ds = \frac{1}{2} \int_{\frac{h}{2+b}}^{\frac{3h}{2}+b} \frac{S_{ow}^2}{\delta} ds = \frac{2h+2b}{\frac{3h}{2}+2b} \int_{\frac{3h}{2}}^{\frac{h}{2}+b} \frac{S_{ow}^2}{\delta} ds \quad \text{и} \quad \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+b} \frac{S_{ow}^2}{\delta} ds = \frac{3h+2b}{\frac{3h}{2}+b} \int_{\frac{3h}{2}}^{\frac{h}{2}+b} \frac{S_{ow}^2}{\delta} ds$$

С учетом суммарного по участкам интеграла искомый параметр  $\Psi$  по участкам интеграл составит:

$$\Psi = 1 + \frac{I_d}{I_{\sigma}^2} \int \frac{S_{ow}^2}{\delta} ds = 1 + \frac{I_t}{I_{\sigma}^2} \cdot \left( 4 \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{S_{ow}^2}{\delta} ds + 2 \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+b} \frac{S_{ow}^2}{\delta} ds \right) \tag{31}$$

### 3 Results and Discussion

Далее по формулам (7)-(15) определим параметр  $\Psi$  для некоторых профилей по ГОСТ 30245-2003 «Стальные гнутые замкнутые сварные профили». Результаты расчета в табличной форме представлены в табл.3. Расчет проведен для каждого типоразмера ширины  $b$  и высоты  $h$ . При этом для каждого типа профилей толщина  $\delta$  взята с минимально и максимально возможными значениями.

Как видно из табл.3 и графика на рис.7, значение параметра  $\Psi$  для наиболее часто встречающихся на практике замкнутых стальных прямоугольных профилей по ГОСТ колеблется в пределах от 2,99 до 252,9.

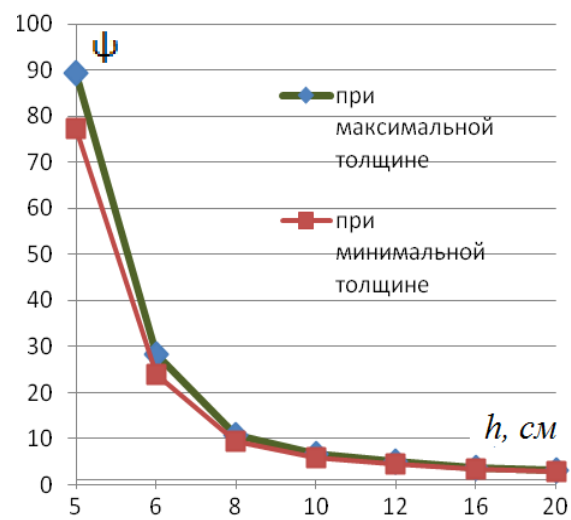
При этом, чем более «удлиненный» профиль, тем меньше параметр  $\Psi$ , и, соответственно

больше знаменатель  $\frac{GI_t}{\Psi - 1}$  в части функционала (6), учитывающий деформации сдвига.



Таблица 3. Значения параметра  $\psi$ Table 3. Values of parameter  $\psi$ 

Марка профиля ( $b \times h \times \delta$ ) мм			$\int S_{ox}^2 ds \text{ см}^9$	$\psi$
50	40	2	0,59	89,352
50	40	5	1,03	77,400
60	40	2	3,83	28,248
60	40	6	7,29	23,832
80	40	2	32,62	10,692
80	40	6	65,24	9,348
100	40	3	181,20	6,585
100	40	7	287,98	5,892
120	40	3	525,28	5,047
120	40	7	852,60	4,597
160	40	3	2570,18	3,736
160	40	7	4287,90	3,483
200	40	4	10367,32	3,123
200	40	7	14253,63	2,994

Рис. 7 - График зависимости  $\psi(h)$  для прямоугольного профиляFig. 7 – Diagram  $\psi(h)$  for rectangular profile

Отметим, что в квадратном сечении никаких секториальных координат не имеется, а параметр  $\psi$  стремится к бесконечности. Таким образом, в квадратном замкнутом сечении, во-первых, отсутствует депланация; во-вторых, учитываемые в работе деформации сдвига равны нулю.

В общем случае к недепланируемым сечениям относятся все сечения, в которые возможно вписать окружность. Соответственно, область применения исследуемых конечных элементов по полусдвиговой теории (помимо открытых депланируемых профилей) – множество замкнутых сечений, не имеющих вписанной окружности.

В качестве модели исследования примем замкнутый профиль 150x50x1,5 (мм), обладающего геометрическими характеристиками, представленными в табл.4. Вычисление геометрических характеристик выполнено по приведенным выше формулам (7)-(31).

Таблица 4. Геометрические характеристики профиля  
Table 4. Geometric characteristics of the profile

	Параметр	Значение	Единицы измерения
$I_t$	Момент инерции при свободном кручении	84,375	см <sup>4</sup>
$I_w$	Секториальный момент инерции	175,78125	см <sup>6</sup>
$\psi$	Параметр влияния формы сечения	5,4	

$G=0,81 \cdot 10^5$  МПа и  $E=2,1 \cdot 10^5$  МПа- модули сдвига и упругости стального проката марки 255. В качестве «тестовой» нагрузки приложим равномерно распределенную по длине нагрузку единичную нагрузку  $q=1$  дН с эксцентриситетом  $e$ . По аналогии с задачами, решенными ранее в [18] примем величину эксцентриситета распределенной нагрузки  $e=3,35$  см

На рис. 8-10 представлены графики зависимости функций кручения и депланации, а также внутренних силовых факторов, для ранее обозначенной задачи

Таблица 5. Результаты вычисления перемещений при численном эксперименте  
Table 5. Calculation results of displacements in the numerical experiment

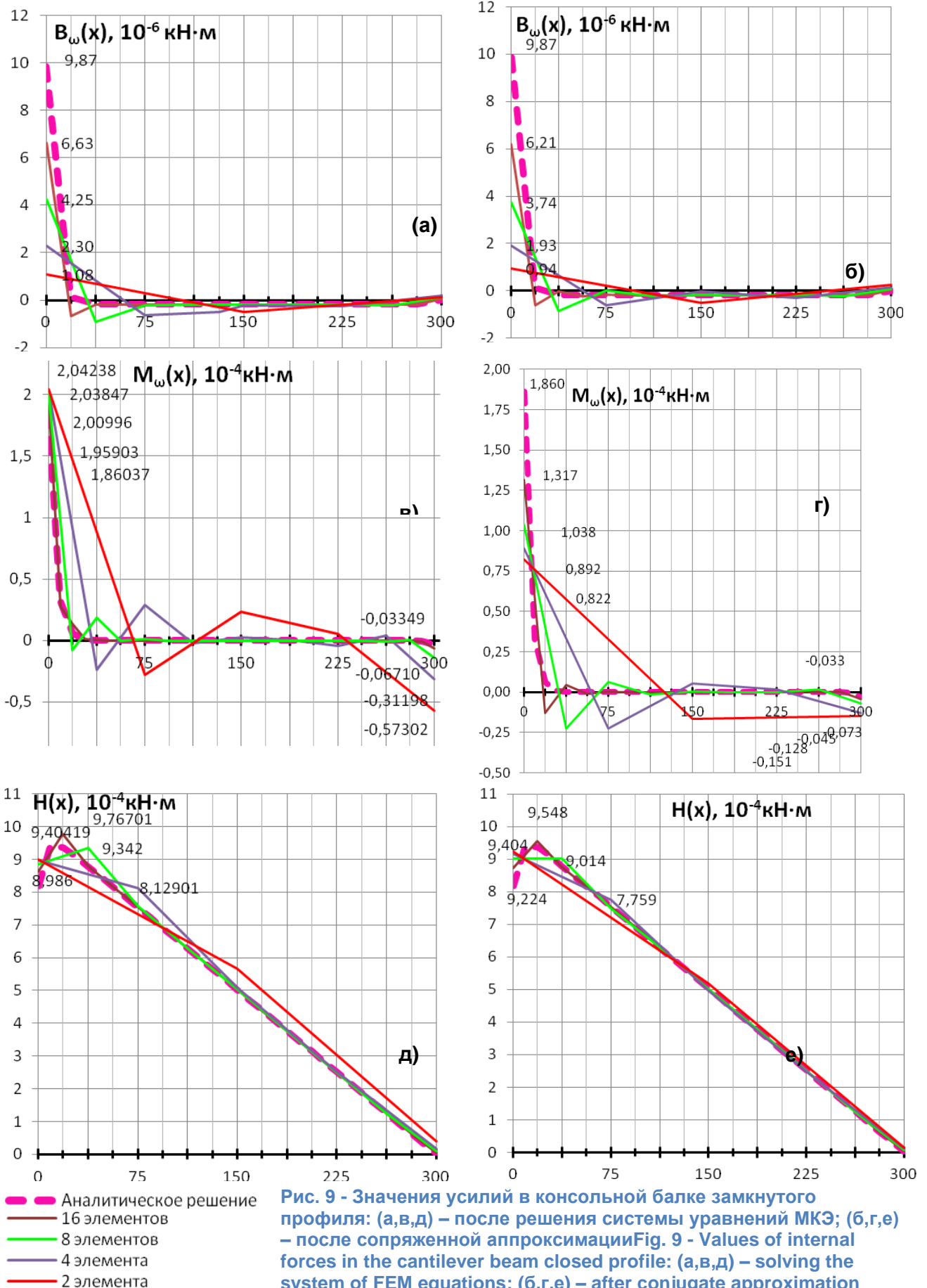
№ п/п	Кол-во КЭ	Размер КЭ, см	Жесткая заделка		Шарнирное опирание		консоль (макс. значения)	
			$\theta_{\max}$ , 10 <sup>-6</sup>	$\beta_{\max}$ , 10 <sup>-8</sup> см <sup>-1</sup>	$\theta_{\max}$ , 10 <sup>-4</sup>	$\beta_{\max}$ , 10 <sup>-6</sup> см <sup>-1</sup>	$\theta_{\max}$ , 10 <sup>-5</sup>	$\beta_{\max}$ , 10 <sup>-7</sup> см <sup>-1</sup>
1	1	300	-	-	-	-	2,15384	5,49160
2	2	150	5,30092	-	5,38109	2,78872	2,16763	6,09072
3	4	75	5,36792	2,93413	5,46797	5,09609	2,17994	9,53005
4	8	37,5	5,41751	5,09034	5,49893	6,31902	2,18727	12,0181
5	16	18,75	5,43477	6,09433	5,50690	6,84617	2,18993	13,1074
8	аналитическое решение [18]		5,43870	6,20263	5,49790	7,08500	2,19045	13,3240



**Рис. 8 - Значения перемещений в балках: (а,б)- жестко заземленной; (в,г) – шарнирно опертой; (д,е) – консольной**  
**Fig. 8 - Displacement values in beams: (а,б)- fixed; (в,г) – hinged; (д,е) – cantilever**

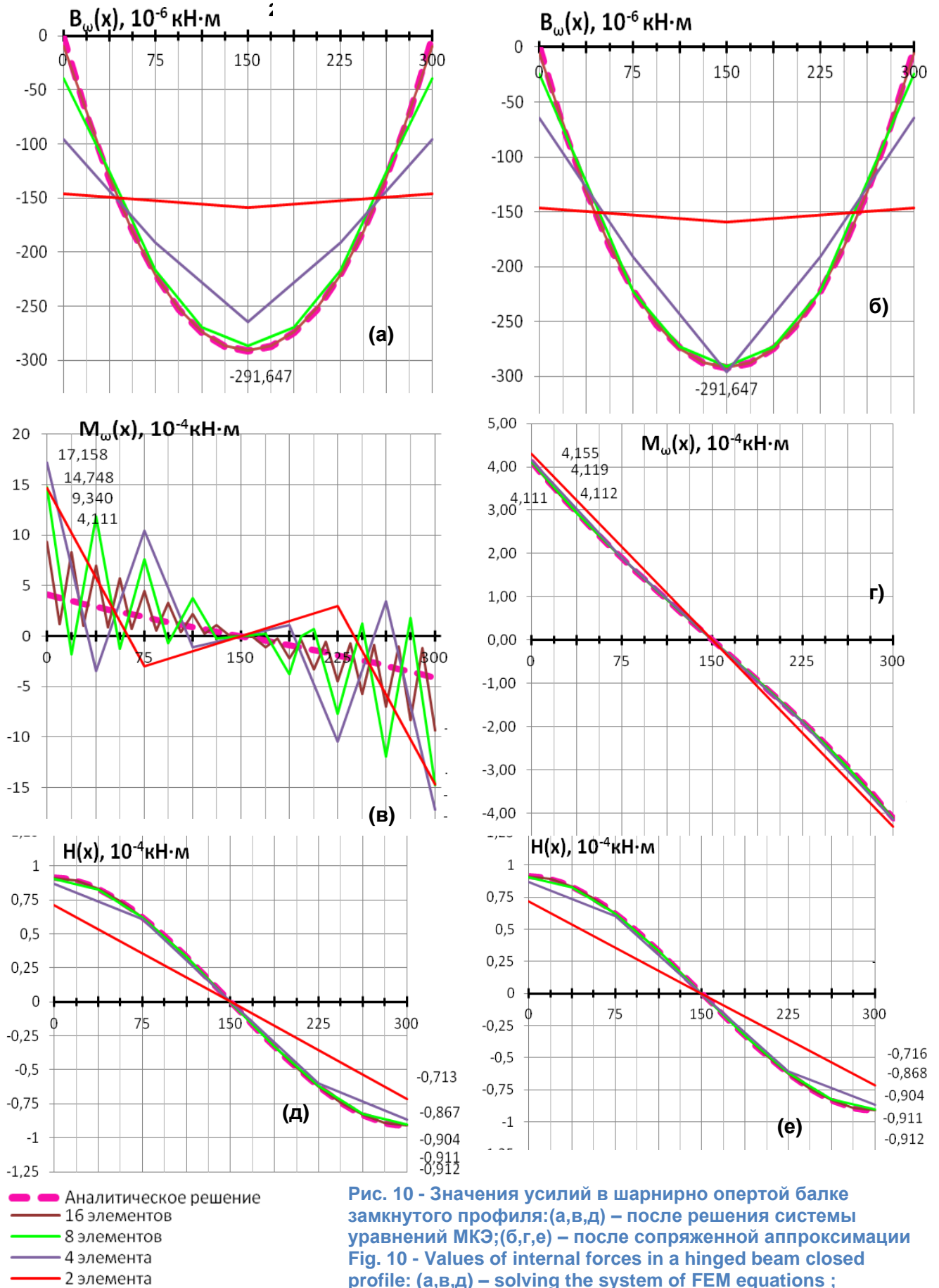
Как видно, из графиков, наблюдается достаточно приемлемая скорость аппроксимации, и требуемая сходимость достигается при разбиении на 8 конечных элементов, а сходимость бимоментов по краям – при 16 элементах.

Далее на основе полученных перемещений определим значения внутренних усилий на элементах. Рассмотрим случай консольного стержня (рис.9).



**Рис. 9 - Значения усилий в консольной балке замкнутого профиля: (а,в,д) – после решения системы уравнений МКЭ; (б,г,е) – после сопряженной аппроксимации**  
**Fig. 9 - Values of internal forces in the cantilever beam closed profile: (a,b,d) – solving the system of FEM equations; (b,g,e) – after conjugate approximation**

Рассмотрим случай шарнирного опирания с двух сторон (рис.10).



**Рис. 10 - Значения усилий в шарнирно опертой балке замкнутого профиля:(а,в,д) – после решения системы уравнений МКЭ;(б,г,е) – после сопряженной аппроксимации**  
**Fig. 10 - Values of internal forces in a hinged beam closed profile: (a,в,д) – solving the system of FEM equations ; (б,г,е) – after conjugate approximation**



Как видно из рис. 8-10, с точки зрения, как перемещений, так и усилий, оптимальным шагом сгущения сетки является такой, при котором дробление стержня происходит минимум на 8 КЭ, однако в случае заземления концов графики бимоментов имеют несколько «вытянутый» характер, сопровождающийся высоким значением производной на границах. Данное обстоятельство свидетельствует о необходимости в таких расчетных ситуациях увеличения шага сгущения сетки до 32 конечных элементов.

## 4 Conclusions

По результатам статьи, посвященной теоретическим и практическим аспектам реализации метода конечных элементов для полусдвиговой теории В.И. Сливкера для анализа напряженно-деформированного состояния систем тонкостенных стержней замкнутого профиля, находящихся в условиях стесненного кручения:

1. Исследован конечный элемент с квадратичной аппроксимацией функций кручения и депланации для расчета тонкостенных стержней замкнутого профиля, находящихся в условиях стесненного кручения. Показана сходимость данного КЭ к аналитическому решению: разбиение шарнирно опертого стержня замкнутого профиля на 8 конечных элементов (в случае примыкания стержня к заделке – на 32 КЭ) дает приемлемую для инженерных расчетов точность вычислений внутренних усилий стесненного кручения.
2. Получены зависимости для вычисления параметра влияния формы прямоугольного сечения, значение которого необходимо при расчетах МКЭ с использованием данной теории, в том числе данного конечного элемента.
3. Получен диапазон значений параметра влияния формы сечения для наиболее часто встречающихся на практике замкнутых стальных прямоугольных профилей на примере ГОСТ 30245-2003, находящийся в пределах от 2,99 до 252,9.
4. Практически установлено, что для расчета систем тонкостенных стержней, находящихся в условиях стесненного кручения, конечный элемент полусдвиговой теории В.И. Сливкера с квадратичной аппроксимацией функций кручения и депланации, ранее известный и апробированный на расчетах стержневых систем открытого профиля, является действительно универсальным как для открытого, так и замкнутого профилей; конечный элемент рекомендован к внедрению в программные комплексы

## References

1. Shevtsov, S., Astafeva, N.S. The concept of modular construction on the example of the use of light metal structures. *Inzhenernyye issledovaniya [Engineering Research]*. 2022. No. 3(8). Pp. 30-37. EDN: BGGOMA.
2. Sovetnikov, D.O., Videnkov, N.V., Trubina, D.A. Light gauge steel framing in construction of multi-storey buildings. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2015. 3(30)(3). Pp. 152–165. DOI:10.18720/CUBS.30.11. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2015.30.11> (date of application: 30.09.2020).
3. Bondar, V.T. Comparative analysis of stress-deformed state of profiled sheets C-44-1.5 mm, C-21-1.5 mm, CIMC-D02-01A 1.6. *Inzhenernyye issledovaniya [Engineering Research]*. 2022. No. 3(8). Pp. 11-19. EDN: EGTJJJ.
4. Gordeeva, A., Vatin, N. Finite element calculation model of thin-walled cold-formed profile in software package SCAD Office. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. 21(3). Pp. 36–46.
5. Nazmeeva, T., Sivokhin, A. Numerical investigations of the connections between cold-formed steel curtain walls and reinforced concrete slabs. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018. 456(1). DOI:10.1088/1757-899X/456/1/012081.
6. Vlasov, P.P., Lalina, I.I., Savchenko, A., Viacheslavovich, E.E., Nesterov, A.A. Finite element analysis of the steel column in SCAD. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2015. 38(11). Pp. 27–41. DOI:10.18720/CUBS.38.3. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2015.38.3> (date of application: 9.11.2022).
7. Nazmeeva, T. V., Vatin, N.I. Numerical investigations of notched C-profile compressed members with initial imperfections. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. 62(2). Pp. 92–101. DOI:10.5862/MCE.62.9.



8. Rybakov, V.A., Gamayunova, O. The stress-strain state of frame constructions' elements from thin-walled cores. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2013. 12(7). Pp. 79–123. DOI:10.18720/CUBS.12.10. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2013.12.10> (date of application: 14.11.2022).
9. Sovetnikov, D.O., Azarov, A.A., Ivanov, S.S., Rybakov, V.A. Methods of calculation of thin-walled bars: statics, dynamics and stability. *AlfaBuild*. 2018. 3(1). Pp. 7–33. DOI:10.34910/ALF.4.1. URL: <https://alfabuild.spbstu.ru/article/2018.3.2> (date of application: 14.11.2022).
10. Vlasov, V.Z. Thin-walled elastic beams. Israel Program for Scientific Translation. Jerusalem, 1961. 493 p.
11. Kuzmin, N.A., Lukash, A.P., Mileykovskiy, I.Y. Raschet konstrukcij iz tonkostennykh sterzhnej i obolochek. M.: Gosstrojizdat, 1960. 264 p.
12. Belyj, G.I. Raschet uprugoplasticheskikh tonkostennykh sterzhnej po prostranstvenno-deformiruemoj sheme. *Stroitel'naja mehanika sooruzhenij*. 1983. 42. Pp. 40–48.
13. Umanskiy A. A. Krucheniye i izgib tonkostennykh aviakonstruktsiy. [Torsion and bending thin aviakonstruktsiy]. M.:Izd-vo Oborongiz, 1939. 112 p.
14. Tusnin, A. Finite Element for Calculation of Structures Made of Thin-Walled Open Profile Rods. *Procedia Engineering*. 2016. 150. Pp. 1673–1679. DOI:10.1016/J.PROENG.2016.07.149.
15. Tusnin, A.R. Finite element for numeric computation of structures of thin-walled open profile bars. *Metal constructions*. 2009. 15(1). Pp. 73–78.
16. Tusnin, A. Use thin-walled finite element in calculating chase an open profile. *Nauchno-tekhnicheskij vestnik Povolzhya*. 2012. 6(405–408).
17. Tusnin, A. Chislenny raschet konstruktsiy iz tonkostennykh sterzhney otkrytogo profilya [Numerical calculation of thin-walled structures of public profile]. Moscow, M.: MGSU: Izd-vo ASV, 2009. 143 p.
18. Lalin, V.V., Rybakov, V.A., Morozov, S.A. The Finite Elements Research for Calculation of Thin-Walled Bar Systems. *Magazine of civil engineering*. 2012. 27(1). Pp. 53–73. DOI:10.5862/mce.27.7. URL: <https://engstroy.spbstu.ru/article/2012.27.7> (date of application: 5.01.2021).
19. Lalin, V., Rybakov, V., Sergey, A. The finite elements for design of frame of thin-walled beams. *Applied Mechanics and Materials*. 2014. 578–579. Pp. 858–863. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMM.578-579.858.
20. SP 16.13330.2017 Steel structures. URL: <https://docs.cntd.ru/document/456069588>.
21. SP 260.1325800.2016 Cold-formed thin-walled steel profile and galvanized corrugated plate constructions. Design rules. URL: <https://docs.cntd.ru/document/456033922>.
22. Perelmuter, A., Yurchenko, V. On the issue of structural analysis of spatial systems from thin-walled bars with open profiles. *Metal Constructions*. 2014. 20. Pp. 179–190.
23. Lalin, V.V., Rybakov, V.A. The finite elements for design of building walling made of thin-walled beams. *Magazine of civil engineering*. 2011. 26(8). Pp. 69–80. DOI:10.5862/mce.26.11. URL: <https://engstroy.spbstu.ru/article/2011.26.11> (date of application: 5.01.2021).
24. Slivker, V.I. *Stroitel'naya mekhanika. Variatsionnye osnovy*. [Structural mechanics. Variational basis]. Moscow: ASV, 2005., 2005. 710 p.
25. Dzhanelidze, G.Y., Panovko, Y.G. *Statika uprugikh tonkostennykh sterzhney*. [Statics of thin elastic rods]. Moscow, 1948. 208 p.