



Research Article

Received: December 9, 2025

Accepted: January 13, 2026

Published: February 16, 2026

ISSN 2658-5553

# Model of a spatial cantilever truss and formulas for calculating its deformations

Kirsanov, Mikhail Nikolaevich<sup>1\*</sup> <sup>1</sup>Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation; [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru) (K.M.N.)\*Correspondence: \* email [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru)

## Keywords:

Space truss; Maxwell-Mohr formula; Induction; Maple; Analytical solution; Deflection; Asymptotics

## Abstract:

**The object of research** is a spatial lattice statically determinate regular cantilever truss formed by connecting eight plane trusses. The truss is loaded at its nodes. The longitudinal stiffness of the bars is assumed to be equal. Formulas are derived for the dependence of the truss end deflection on its dimensions and the number of panels. **Method.** The forces in the bars are found in analytical form using computer mathematics methods by solving a system of algebraic equations. The Maxwell - Mohr formula is used. Generalization of the solutions to the case of an arbitrary number of panels is performed by induction. **Results.** The resulting formulas for the deflections have the form of polynomials in the number of panels. Formulas are derived for the forces in individual, most critical bars. Asymptotic forms of the solutions are found.

## 1 Introduction

Для статического расчета стержневых систем на практике обычно применяют метод конечных элементов [1], [2]. Экспериментальные и аналитические методы исследования фермы моста использовались в [3]. Развитие систем компьютерной математики для расчета и анализа простых тестовых моделей строительных конструкций позволяет получать простые аналитические решения [4], [5]. Аналитические методы для расчета строительных конструкций использовались в работах [6], [7]. В [8] в системе компьютерной математики Maple [9] выполнен кинематический анализ и рассчитан весь спектр собственных частот плоской фермы. Зависимость области резонансно безопасных частот от размеров статически определимой плоской фермы с произвольным числом панелей найдена в [10]. Простая формула для первой частоты собственных колебаний плоской фермы с прямолинейным верхним поясом в зависимости от числа панелей методом индукции выведена в [11]. Задача оптимизации плоской фермы с учетом линейной ползучести материала стержней решена в [12]. Расчет прогиба пролета плоской арочной фермы регулярного типа под действием вертикальной узловой нагрузки выполнен в [13]. Аналитический расчет деформаций плоской фермы под действием равномерной нагрузки выполнен в [14]. Зависимость перемещений узлов трапециевидной ферменной балки от количества панелей методами компьютерной математики путем индуктивного обобщения серии частных решений для ферм с конечным числом панелей получена в [15]. Спектр собственных частот четырехгранного замкнутого контура пространственной регулярной стержневой конструкции с применением приближенных формул Рэлея и Донкерлея, дающих верхнюю и нижнюю оценку решению, рассчитан и проанализирован в [16]. Аналитическую зависимость прогиба стержневой модели каркаса четырехскатного покрытия от числа панелей получил Astakhov S.V. в [17]. Зависимость частотных характеристик стержневых конструкций регулярного типа от числа панелей найдена в [18] и [19].

Формулы для расчета прогиба плоской фермы балочного типа с раскосной двойной решеткой и произвольным числом панелей методами Maple выведены в [20]. Общим вопросам существования и расчета регулярных статически определимых стержневых конструкций

Kirsanov, M.

Model of a spatial cantilever truss and formulas for calculating its deformations; 2026; AlfaBuild; 38 Article No 3801. doi: 10.57728/ALF.38.1

посвящены работы Hutchinson R.G. и Fleck N.A. [21], [22]. Задачи оптимизации регулярных стержневых систем с ограничением на частоту колебаний решал Kaveh A. [23], [24].

В настоящей работе предлагается схема новой конструкции пространственной консольной статически определимой фермы и алгоритм аналитического расчета ее прогиба. Характерная черта этой фермы — двухслойная схема поясов, не соединенных по своим внутренним поверхностям, исключая только соединение четырьмя стержнями на свободном конце.

## 2 Материалы и методы / Materials and Methods

### 2.1 Конструкция фермы и усилия в стержнях

Ферма длиной  $na$  составлена из восьми плоских раскосных ферм одинаковой структуры, соединенных по длинным сторонам (рис. 1, 2). Из них две боковые вертикальные фермы имеют размеры  $na \times h$ , две горизонтальные фермы имеют размеры  $na \times b$ , четыре наклонные фермы имеют размеры  $na \times c$ , где  $c = \sqrt{b^2 + h^2}$ . Конструкция крепится в восьми точках на торце. В шарнирах  $A, B, C, C', B'$  крепление осуществляют горизонтальные стойки, в шарнире  $A'$  ферма крепится на три стержня, работающие как сферический шарнир. В точке  $D'$  — шарнир цилиндрический, моделируемый двумя взаимно перпендикулярными опорными стержнями [25]. Все опорные стержни в расчетах условно принимаются жесткими, поэтому их длины не задаются.

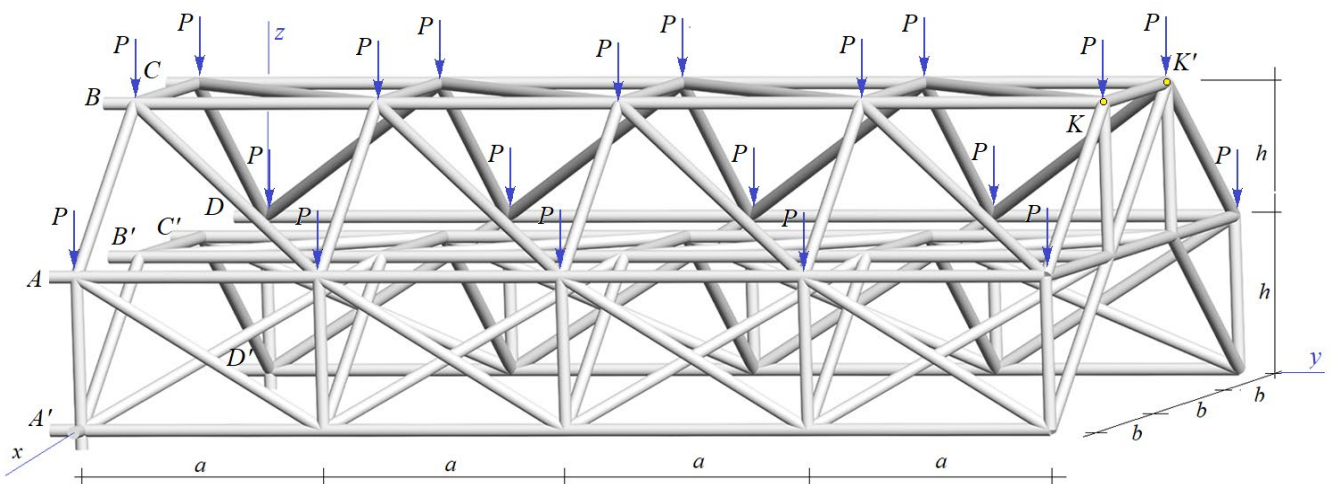


Рис. 1 – Схема фермы,  $n=4$

Fig. 1 – Truss scheme,  $n=4$

Image by the author of the article

Консоль длиной  $L=na$  содержит  $N = 8(n + 1)$  узлов и  $\eta = 24(n + 1)$  стержней, в число которых включены и одиннадцать опорных стержней (восемь продольных стержней по оси  $y$ , два дополнительных стержня в узле  $A'$  и один вертикальный в  $D'$ ). Конструкция статически определимая. Все нагрузки на ферму узловые. На рисунке 1 представлено симметричное загрузку четырех верхних ребер фермы вертикальными силами. Начало координат располагается в узле  $D'$ . Задача об усилиях в стержнях решается методом вырезания узлов в системе компьютерной математики Maple для произвольного числа панелей. Деформации конструкции в случае линейной упругости стержней определяются по формуле Максвелла – Мора. Прогиб фермы связывается с вертикальным смещением узлов  $K$  и  $K'$ .

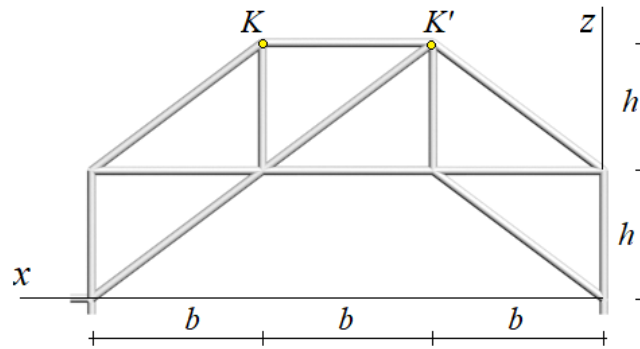


Рис. 2 – Торец фермы  
 Fig. 2 – Truss end  
 Image by the author of the article

Задача решается методом вырезания узлов. Из системы уравнений равновесия узлов в проекциях определяются усилия в стержнях одновременно с реакциями опор, необходимые для расчета жесткости конструкции. Для составления системы уравнений равновесия стержни и узлы нумеруются (рис. 3).

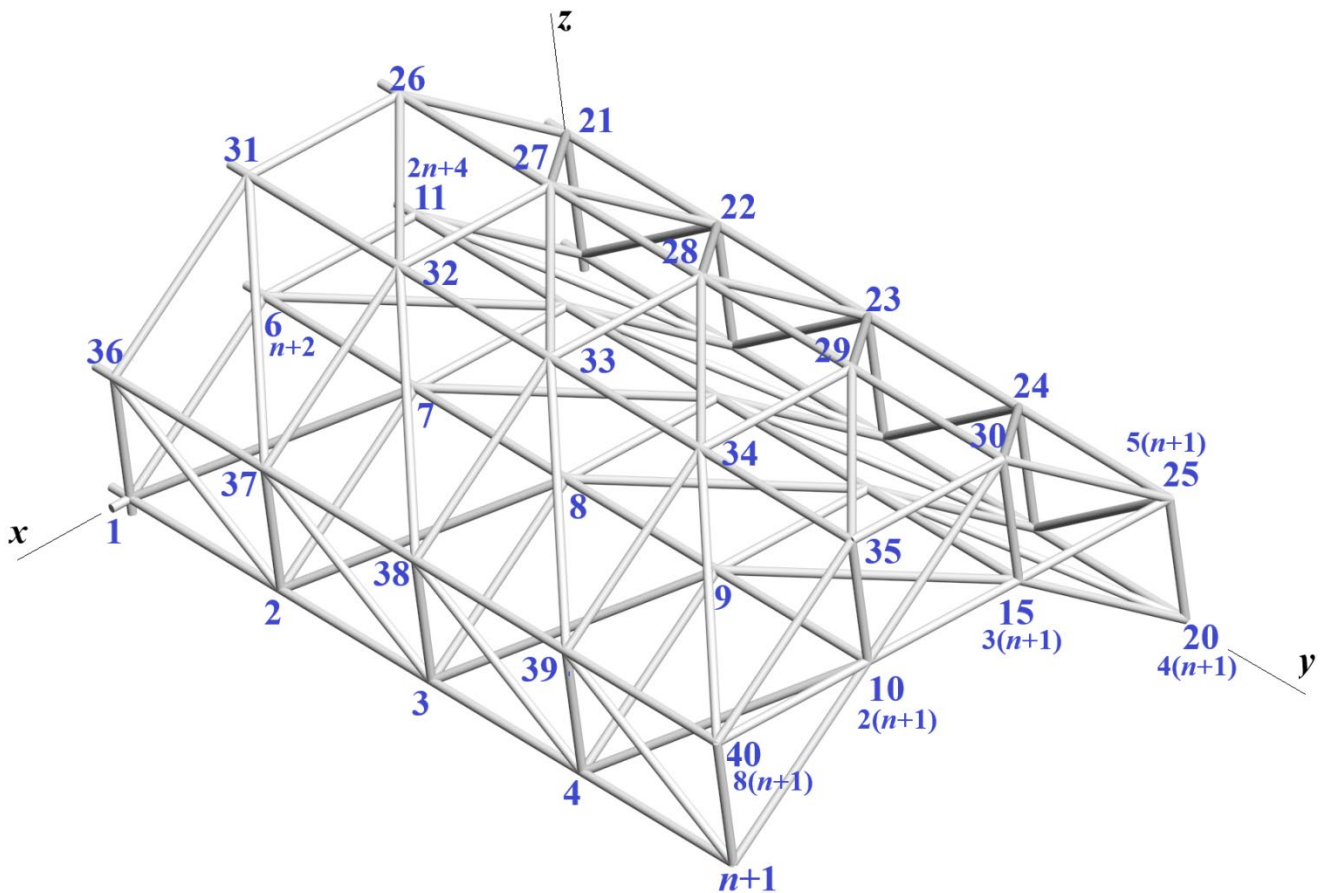


Рис. 3 – Нумерация узлов,  $n=4$   
 Fig. 3 – Node numbering,  $n=4$   
 Image by the author of the article

В параметрической форме для числа панелей  $n$  задаются координаты узлов фермы. Координаты внутренних узлов фермы имеют следующий вид:



$$\begin{aligned}
 x_{i+(n+1)j} &= a(i-1), \quad j = 0, \dots, 7, \\
 y_i &= y_{i+7(n+1)} = 3b, \quad y_{i+n+1} = y_{i+6(n+1)} = 2b, \\
 y_{i+2n+2} &= y_{i+5(n+1)} = b, \quad y_{i+3n+3} = y_{i+4(n+1)} = 0, \\
 z_i &= z_{i+3(n+1)} = 0, \quad z_{i+n+1} = z_{i+2(n+1)} = z_{i+4(n+1)} = z_{i+7(n+1)} = h, \\
 z_{i+5(n+1)} &= z_{i+6(n+1)} = 2h, \quad i = 1, \dots, n+1.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Координаты шарниров крепления опорных стержней длиной  $a$ :

$$\begin{aligned}
 x_{j+8(n+1)} &= x_{j+n(j-1)}, \\
 y_{j+8(n+1)} &= -a, \quad z_{j+8(n+1)} = z_{j+n(j-1)}, \quad j = 1, \dots, 8.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Порядок соединения стержней в узлы задается специальными списками номеров концов стержней. Продольные стержни, например, кодируются следующим образом:

$$T_{i+n(j-1)} = [i + (n+1)(j-1), i + n(j-1) + j], \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, 8. \tag{3}$$

Элементы списков  $T_i$  — это номера условного начала и конца стержня  $i$ . Матрица системы уравнений равновесия узлов состоит из направляющих косинусов усилий, вычисленных по этим данным. Для решения системы алгебраических уравнений  $\mathbf{GS}=\mathbf{B}$  с матрицей  $\mathbf{G}$  и правой частью  $\mathbf{B}$ , содержащей внешние нагрузки, при определении вектора усилий  $\mathbf{S}$  используются встроенные в Maple операторы. В случае внешней узловой нагрузки, приложенной к четырем верхним ребрам фермы, ненулевые элементы вектора правой части имеют вид:  $B_{3i} = -P, i = 4n + 5, \dots, 8n + 8$ . Прогиб определяется по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\eta-11} S_i^{(p)} S_i^{(1)} l_i / (EF), \tag{4}$$

где  $S_i^{(p)}$  — усилия в стержнях фермы от действия нагрузки,  $l_i$  — длина стержня. Жесткость  $EF$  всех стержней принимается одинаковой. Одиннадцать опорных стержней принимаются жесткими, их усилия в сумму не входят.

В конструкции фермы нет узла на оси симметрии, по деформации которого можно оценить прогиб консоли, поэтому прогиб определяется как полусумма прогибов от действия единичных сил на узлы  $K$  и  $K'$ . От этой нагрузки в стержнях фермы появляются усилия  $S_i^{(1)}$ . Расчет прогибов ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей дает следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= P(6a^3 + 7b^3 + 3c^3 + 6d^3 + 7h^3) / (2EF), \\
 \Delta_2 &= P(59a^3 + 10b^3 + 4c^3 + 18d^3 + 19h^3) / (2EF), \\
 \Delta_3 &= P(254a^3 + 13b^3 + 5c^3 + 36d^3 + 37h^3) / (2EF), \\
 \Delta_4 &= P(740a^3 + 16b^3 + 6c^3 + 60d^3 + 61h^3) / (2EF), \\
 \Delta_5 &= P(1720a^3 + 19b^3 + 7c^3 + 90d^3 + 91h^3) / (2EF), \dots
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $d = \sqrt{a^2 + h^2}$ . В общем виде решение для прогиба имеет вид:

$$\Delta_n = P(C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 c^3 + C_4 d^3 + C_5 h^3) / (EF), \tag{6}$$

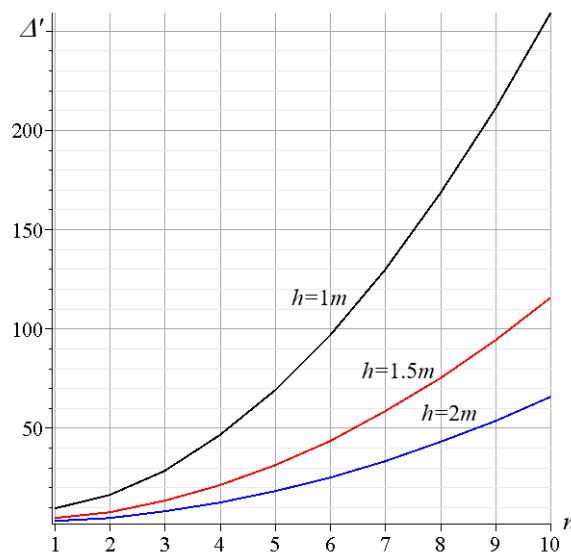
где коэффициенты  $C_i, i = 1, \dots, 5$  получаются из решения рекуррентных уравнений методами Maple:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= n(n+1)(27n^2 + n + 8) / 24, \\
 C_2 &= (3n+4) / 2, \quad C_3 = (n+2) / 2, \quad C_4 = 3n(n+1) / 2, \\
 C_5 &= (3n^2 + 3n + 1) / 2.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Для коэффициента  $C_4$ , например, оператор `rgf_findrecur` возвращает уравнение четвертого порядка

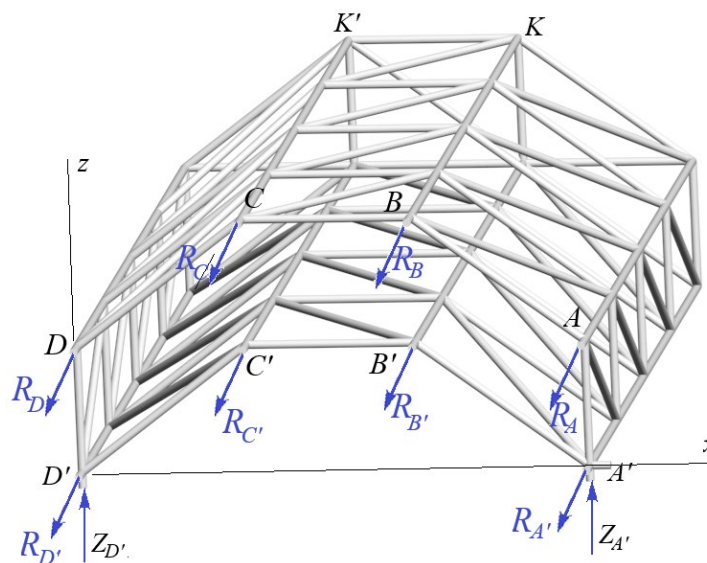
$$C_{4,n} = 3C_{4,n-1} - 3C_{4,n-2} + C_{4,n-3}. \tag{8}$$

Кривые зависимости относительного прогиба консоли  $\Delta' = \Delta_n EF / (P_0 L)$  для различных значений высоты  $h$  при  $a = 3m$ ,  $b = 2m$ ,  $P_0 = P / (4n + 4)$  приведены на рисунке 4.



**Рис. 4 – Зависимость прогиба от числа панелей (рис. 1)**  
**Fig. 4 – Dependence of deflection on the number of panels (Fig. 1)**  
*Image by the author of the article*

Аналитическая форма решения позволяет проследить его асимптоту. Кривые прогиба имеют квадратичные асимптоты  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^2 = 9a^2 / (32h^2)$ .



**Рис. 5 – Реакции опор**



**Fig. 5 – Support reactions**  
Image by the author of the article

Одновременно с усилиями в стержнях программа определяет и реакции опор. Индуктивное обобщение решения задачи для шести ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей, дает следующие зависимости от числа панелей:

$$\begin{aligned} R_{A'} &= R_{D'} = -3Pa(n+1)n / (2h), \\ R_A &= R_D = 2Pa(n+1)n / h, \\ R_C &= R_B = Pa(n+1)n / (2h), \\ R_{C'} &= R_{B'} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Верхние горизонтальные опорные стержни растянуты, нижние — сжаты. При уменьшении высоты фермы  $h$  реакции опор растут, зависимость же реакций от длины панелей  $a$  линейная.

Если на консоль действуют две сосредоточенные силы  $P/2$  в точках  $K$  и  $K'$  (рис. 1, 5), то правая часть системы уравнений равновесия имеет вид  $B_{3(2n+2)} = B_{3(3n+3)} = -P$ . По аналогии с выводом коэффициентов (7) в формуле прогиба (6), можно получить соответствующее более простое решение для коэффициентов в формуле для прогиба (6):

$$C_1 = n(2n^2 + 1) / 6, C_2 = 1, C_3 = 1/2, C_4 = n/2, C_5 = (n+1)/2. \quad (10)$$

В этом случае  $P_0 = P$ . Это решение, как и решение (6) с коэффициентами (7), также имеет квадратичную асимптоту  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^2 = a^2 / (3h^2)$ .

На практике для расширения круга задач, решаемых для этой конструкции, удобно использовать линейную комбинацию решений (7) и (10). Реакции опор от концевой нагрузки также имеют более простую форму:

$$\begin{aligned} R_{A'} &= R_{D'} = -Pan / (2h), \\ R_A &= R_D = Pan / (2h), \\ R_C &= R_B = R_{C'} = R_{B'} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Анализ решения задачи о прогибе (6) с коэффициентами (7) позволяет выделить его некоторые особенности. Так, если при варьировании размеров фермы зафиксировать произведение  $bh$ , что эквивалентно постоянству площади шести прямоугольных треугольников с катетами  $b$  и  $h$ , то можно выделить кривые постоянных прогибов конструкции при изменении размеров  $a$  и  $h$ . На рисунке 6 даны кривые, для которых относительный прогиб одинаковый и постоянно произведение  $bh = 5\text{ м}^2$ . Для построения кривых использовался оператор неявных функций *implicitplot*. С помощью этих кривых можно на практике выбрать оптимальное сочетание размеров фермы.

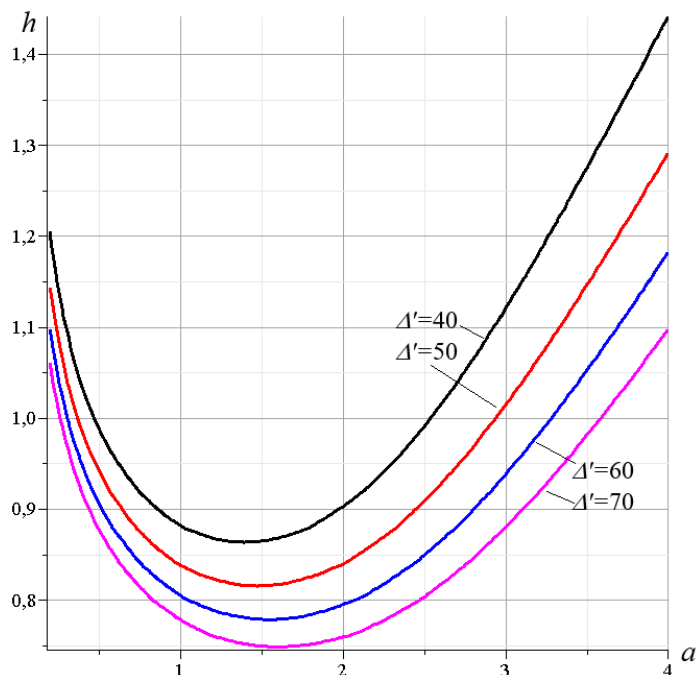


Рис. 6 – Кривые равного относительного прогиба,  $n=4$   
 Fig. 6 – Curves of equal relative deflection,  $n=4$   
 Image by the author of the article

Следует отметить, что если строить аналогичные кривые не для относительного прогиба  $\Delta'$ , а для абсолютного  $\Delta$ , то эти кривые будут существенно другой формы.

### 3 Results and Discussion

Предложена схема модели статически определимой консольной фермы с двойной решеткой на восьми опорах, допускающая аналитическое решение задачи о прогибе при произвольном числе панелей. Рассмотрены два типа узловой нагрузки и получены формулы для прогиба конца консоли. Выведены формулы для реакций опор. Формулы имеют достаточно простой полиномиальный вид степени не выше четвертой по числу панелей. В случае задачи о прогибе консоли только под действием сил на конце фермы решение еще проще — три из пяти коэффициентов расчетной формулы постоянны. Предложенный алгоритм расчета позволяет по аналогии с уже выведенными формулами вывести формулы и для других нагрузок. Найдена асимптотика решений.

### 4 Conclusions

Основные результаты работы:

1. Предложена схема пространственной статически определимой консольной фермы регулярного типа и аналитические решения задачи о прогибе.
2. Найдены квадратичные асимптотики полученных решений.
3. Выведены формулы для реакций опор конструкции.
4. Построены кривые равного прогиба конструкции.

### References

- 1 Zhang, D., Zhao, Q., Li, F., Tao, J. and Gao, Y. (2018) Torsional Behavior of a Hybrid FRP-Aluminum Space Truss Bridge: Experimental and Numerical Study. *Engineering Structures*, Elsevier Ltd, **157**, 132–143. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.12.013>
- 2 Grishanina, T.V. and Shklyarchuk, F.N. (2022) Numerical-Analytical Method for Calculating the Oscillations of Regular Structures. *Mechanics of composite materials and structures*, **28**, 175–186. <https://elibrary.ru/item.asp?id=49026364>



- 3 Embaby, M. and El Naggat, M.H. (2025) Experimental and Analytical Investigation for Modular Double Truss Bridge. *Engineering Structures*, Elsevier, **322**, 119087. <https://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2024.119087>
- 4 Komerzan E.V. and Maslov A.N. (2023) Estimation of the L-Shaped Spatial Truss Fundamental Frequency Oscillations. *Structural mechanics and structures*, **37**, 35–45. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.004>
- 5 Komerzan, E. V. and Maslov, A.N. (2023) Analytical Evaluation of a Regular Truss Natural Oscillations Fundamental Frequency. *Structural Mechanics and Structures*, **37**, 17–26. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.002>
- 6 Goloskokov, D.P. and Matrosov, A. V. (2018) Approximate Analytical Approach in Analyzing an Orthotropic Rectangular Plate with a Crack. *Materials Physics and Mechanics*, **36**, 137–141. [https://doi.org/10.18720/MPM.3612018\\_15](https://doi.org/10.18720/MPM.3612018_15)
- 7 Goloskokov, D.P. and Matrosov, A. V. (2018) Approximate Analytical Solutions in the Analysis of Thin Elastic Plates. *AIP Conference Proceedings*. <https://doi.org/10.1063/1.5034687>
- 8 Kirsanov, M.N. and Xuan, J. (2023) Kinematic Analysis, Spectrum of Natural Frequencies, and Formula for the First Frequency of a Planar Truss. *AlfaBuild*, **27**, 2703. <https://doi.org/10.57728/ALF.27.3>
- 9 Zotos, K. (2007) Performance Comparison of Maple and Mathematica. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, **188**, 1426–1429. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.008>
- 10 Luong, C.L. (2024) Dependence of the Region of Resonantly Safe Frequencies on the Dimensions of a Statically Determinate Flat Truss. *Structural Mechanics and Structures*, **41**, 16–26. <https://doi.org/10.36622/2219-1038.2024.41.2.002>
- 11 Shchigol, E.D. (2023) The Formula for the Lower Estimate of the Natural Oscillations of a Flat Regular Girder Truss with a Rectilinear Upper Belt. *Structural Mechanics and Structures*, **37**, 46–53. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.005>
- 12 Tinkov, D. V. (2016) The Optimum Geometry of the Flat Diagonal Truss Taking into Account the Linear Creep. *Magazine of Civil Engineering*, **61**, 25–32. <https://doi.org/10.5862/MCE.61.3>
- 13 Kazmiruk, I.Yu. (2016) On the Arch Truss Deformation under the Action of Lateral Load. *Science Almanac*, **17**, 75–78. <https://doi.org/10.17117/na.2016.03.03.075>
- 14 Belyankin, N.A. and Boyko, A.Y. (2019) Formula for Deflection of a Girder with an Arbitrary Number of Panels under the Uniform Load. *Structural Mechanics and Structures*, **1**, 21–29. [https://www.elibrary.ru/download/elibrary\\_37105069\\_21945931.pdf](https://www.elibrary.ru/download/elibrary_37105069_21945931.pdf)
- 15 Ovsyannikova, V.M. (2020) Dependence of Deformations of a Trapezoidal Truss Beam on the Number of Panels. *Structural Mechanics and Structures*, **26**, 13–20. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44110286>
- 16 Kirsanov, M.N. and Luong, C.L. (2023) Natural Frequency Spectra of Spatial Structure. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **107**, 10604–10604. <https://doi.org/10.4123/CUBS.106.04>
- 17 Astakhov, S.V. (2024) Analytical Assessment of the Deflection of the Rod Model of a Four-Slope Roof Frame. *Structural mechanics and structures*, **43**, 34–41. <https://doi.org/10.36622/2219-1038.2024.43.4.003>
- 18 Luong, C.L. (2024) Estimates of Deflection and Natural Frequency of Vibrations of a Hinged-Rod Truss with an Arbitrary Number of Panels. *Structural mechanics and structures*, **43**, 42–53. <https://doi.org/10.36622/2219-1038.2024.43.4.004>
- 19 Luong, C.L. (2024) Resonance Safety Zones of a Truss Structure with an Arbitrary Number of Panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **113**, 11304. <https://doi.org/10.4123/CUBS.113>
- 20 Gribova O.V. (2025) Formulas for Calculation of Deflection and Natural Frequency of a Flat Truss with an Arbitrary Number of Panels. *Structural Mechanics and Structures*, **44**, 31–39. <https://doi.org/10.36622/2219-1038.2025.44.1.003>
- 21 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2005) Microarchitected Cellular Solids - The Hunt for Statically Determinate Periodic Trusses. *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, **85**, 607–617. <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>
- 22 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2006) The Structural Performance of the Periodic Truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Pergamon, **54**, 756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>



- 23 Kaveh, A. and Talatahari, S. (2009) Particle Swarm Optimizer, Ant Colony Strategy and Harmony Search Scheme Hybridized for Optimization of Truss Structures. *Computers & Structures.*, **87**, 267–283. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.01.003>
- 24 Kaveh, A. and Zolghadr, A. (2018) Meta-Heuristic Methods for Optimization of Truss Structures with Vibration Frequency Constraints. *Acta Mechanica*, **229**, 3971–3992. <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2234-z>
- 25 Kirsanov, M.N. (2023) Model of a Hexagonal Prismatic Truss. Oscillation Frequency Spectrum. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **106**, 10601. <https://doi.org/10.4123/CUBS.106.01>