



Research Article











Received: May 1, 2025

Accepted: May 21, 2025

Published: June 17, 2025

ISSN 2658-5553

Mathematical model of kinematics and requirements for drives of a precision positioning system

Sliva, Andrey Petrovich¹  
Saypulaev, Gasan Ruslanovich^{1*}  
Saypulaev, Musa Ruslanovich¹  
Maslov, Anton Nikolaevich¹  
Potapov, Maksim Andreevich¹  

¹ Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation; SlivaAP@mpei.ru (S.A.P.); saypulaevgr@mail.ru (S.G.R); saypulaevmr@mail.ru (S.M.R.), maslov954@yandex.ru (M.A.P.), PotapovMA@mpei.ru (P.M.A.)

Correspondence: * email saypulaevgr@mail.ru; contact phone [+79855285874](tel:+79855285874)

Keywords:

CNC positioning system; Four-axis manipulator; Kinematics of the end-effector; Positioning errors; Motion geometry

Abstract:

The object of research is a four-axis precision positioning system used in a complex for electron beam welding of metal parts. The purpose of this work is to develop a mathematical model of the motion of the four-axis precision positioning system, find solutions to the direct and inverse problems of the positioning system kinematics, and estimate positioning errors due to the discreteness of the link drive movements. **Method.** A mathematical model of the positioning system motion is developed based on mechanics methods using direction cosine matrices linking the coordinate systems located on each moving link. The solution to the inverse problem is found analytically. Estimates for positioning errors are constructed based on the linearization of the kinematic equations. **Results.** A mathematical model of the kinematics of the four-axis precision positioning system is constructed. An analytical solution to the inverse problem of the positioning system kinematics is found, which can be used to transmit control signals to the drive drivers of the system links. Based on the obtained solution of the direct problem of the kinematics of the positioning system, upper estimates were made for the maximum errors in the positioning of welded parts for given dimensions of the parts and the errors of angular and linear drives due to the discreteness of their movements and backlash.

1 Introduction

Во многих областях человеческой деятельности и промышленности, включая машиностроение, приборостроение и станкостроение, возникает необходимость обеспечить соединение металлических деталей путем электронно-лучевой сварки. На практике спрос на использование 5-осевых станков с числовым программным управлением (ЧПУ) и промышленных сварочных роботов для изготовления всё более сложных механических деталей растёт [1].

Для выполнения сложных соединений требуется обеспечить вакуум в области свариваемых деталей, высокоточное наведение электронного луча с необходимыми параметрами (фокусное расстояние, мощность и т.д.), позиционирование и ориентирование свариваемых деталей в соответствии с технологической операцией. Решение указанных задачи особенно усложняются, когда кривая, вдоль которой свариваются две детали, (кривая сварного шва) является общего вида кривой в трехмерном пространстве [2].



Один из подходов к решению перечисленных задач состоит в неподвижном расположении аппарата электронно-лучевой сварки с постоянной ориентацией электронного луча и перемещении и ориентировании свариваемых деталей таким образом, чтобы электронный луч попадал на кривую сварного шва под необходимым углом. Для решения задачи высокоточного перемещения и ориентирования свариваемых деталей возникает потребность разрабатывать прецизионную систему позиционирования [3]. Указанная система может рассматриваться, как робототехнический манипулятор [4], и для формирования высокоуровневого управления ее движением и при создании постпроцессоров можно использовать решения прямой и обратной задач кинематики указанного манипулятора [3], [4].

Приведем краткий обзор работ, посвященных вопросам разработки систем позиционирования, управления их движением, а также математического моделирования и решения задач кинематики таких систем.

В статье [5] определяются технологические возможности портального фрезерного станка с ЧПУ на примере станка ФЦ1512П, первый рабочий орган которого имеет две поступательные и одну вращательную степени подвижности, а второй рабочий орган обладает одной поступательной степенью свободы. Несмотря на подробное описание станка, в указанной статье отсутствует математическая модель системы и описание низкого уровня системы управления. Анализ геометрических погрешностей станка с ЧПУ на примере станка EMCO PC MILL 155 представлен в исследовании [6].

В работе [3] для анализа погрешностей позиционирования высокоточных станков с ЧПУ используются уравнения кинематики, составленные с использованием параметров Денавита–Хартенберга. Описаны основные шаги при решении прямой и обратной задачи кинематики необходимые для анализа погрешностей позиционирования, но отсутствует их взаимосвязь с системой управления.

В работе [4] предлагается новая математическая модель для анализа и сравнения кинематических характеристик 5-осевых станков с ЧПУ различной конструкции. Обсуждается решение задач кинематики на основе полученной математической модели, но отсутствуют аналитические решения, особо ценные для разработки законов управления.

В работе [7] классифицируются возможные концептуальные решения и существующие реализации 5-координатных станков с ЧПУ на основе теоретически возможных комбинаций степеней свободы.

В работе [8] обсуждается проблема сингулярных конфигураций 5-координатного фрезерного станка с ЧПУ, попадание в которые может привести к погрешностям траектории движения инструмента. Представлен алгоритм расчета обратной кинематики для 5-координатного станка с ЧПУ вблизи сингулярных конфигураций за счет небольшого отклонения ориентации инструмента. Проверка математической модели проводится по результатам испытаний на реальном станке. Однако указанный метод нежелателен/недопустим в системе позиционирования, применяемой в операциях электронно-лучевой сварки, поскольку нарушает технологические требования к ориентации электронного луча.

В работе [2] рассматривается задача программирования фрезеровки деталей сложной формы. Указывается, что это возможно только путём задания точек расположения фрезы в программах ISO, в которых невозможно применять коррекции и компенсацию отклонений на станке.

В работе [9] отмечается, что существующие станки не могут удовлетворить требованиям непрерывной резки с переменными условиями прохода через их фиксированную конфигурацию и не могут реализовать высокоточную обработку, поскольку недостаточно изучены факторы появления погрешностей их работы. В этой работе для анализа точности станков на основе теории кинематических винтов предлагается методика, заключающаяся в создании идеальных кинематических моделей и последующем построении на их основе модели зазоров соединений, производственных допусков и погрешностей во входных переменных; а также модели ошибок, учитывающих комбинированные эффекты.

В работе [10] представлено описание разработки высокоскоростного фрезерного станка для проведения испытаний по обработке композитного материала, а также построения интерфейса для контроллера ЧПУ.

В работе [11] представлена разработка станка с ЧПУ на базе манипулятора с параллельной кинематикой (на основе платформы Стюарта–Гофа) и его применение в мелкосерийном производстве, исследовательских лабораториях или инструментальных цехах.



В статье [12] представлен алгоритм системы управления для 5-координатного фрезерного станка с ЧПУ с системой параллельных механизмов, основанного на платформе Стюарта с шестью степенями свободы. Система управления считывает команды G-кода как стандартный язык программирования станков с ЧПУ, затем извлекает точки данных и интерполирует их для генерации траекторий робота в качестве опорных точек движения. После чего система управления использует модифицированное уравнение обратной кинематики для определения перемещений рабочего органа. Средняя погрешность системы управления составляет 0,1 мм.

В работе [1] указывается, что решение задач обратной кинематики и динамики в случаях, когда инструмент станка или робота следует по параметрической кривой (задаваемых уравнением Безье или сплайном) с большой кривизной, является сложной задачей.

В исследовании [13] отмечается, что для использования 5-координатных станков с ЧПУ постпроцессор играет важную роль. Сложность разработки постпроцессора обусловлена многообразием конструкций 5-координатных станков с ЧПУ.

В работе [14] рассмотрена задача ограничения погрешности аппроксимации (chord error) криволинейных траекторий при выборе частоты цикла управления системы ЧПУ. Предложена методика, обеспечивающая ограничение на заданном уровне погрешности аппроксимации криволинейной траектории при высокоскоростной обработке. Методика учитывает такие параметры, как дискретность измерения положения, ограничения максимальных величин подачи, ускорения и рывка. В работе [15] исследовано влияние дискретности системы ЧПУ на выбор частоты цикла управления для оборудования различного класса точности.

В статье [16] представлена реализация уравнений обратной кинематики в программе постобработки с использованием Matlab. Сгенерированный G-код для многокоординатной обработки был протестирован на виртуальном станке в программном обеспечении Vericut.

В работе [17] отмечается перспективность замены традиционных порталных систем позиционирования станков с ЧПУ на системы позиционирования на основе платформ Стюарта. А в статье [18] предлагается использовать управления системами позиционирования станков с ЧПУ на основе их динамических моделей вместо традиционного кинематического управления.

В статье [19] представлен анализ кинематики и динамики плоского параллельного манипулятора, используемого в качестве рабочего органа станка с ЧПУ. А в работе [20] представлено моделирование кинематики параллельного манипулятора типа «гексапод» применительно к задаче планирования перемещений его рабочего органа.

При решении задач управления движением манипуляторов, используемых в качестве систем позиционирования станков с ЧПУ, необходимо обеспечить планирование траектории движения с избеганием сингулярных конфигураций [21], [22], минимизацию управляющих воздействий [23], а также проводить экспериментальные исследования по применимости предлагаемых методов в конкретных операциях станка с ЧПУ [24], [25].

По результатам обзора можно отметить, что для разработки систем управления движением прецизионной системы позиционирования с ЧПУ необходимо провести математическое моделирование её движения и решить прямую и обратную задачу кинематики. Это также позволит оценить погрешности системы позиционирования, вызванные дискретностью перемещений приводов звеньев и их люфтами.

Целью настоящей работы является разработка математической модели движения четырехосевой прецизионной системы позиционирования, нахождение решений прямой и обратной задач кинематики системы позиционирования, а также проведение оценок для погрешностей позиционирования, обусловленных дискретностью перемещений приводов звеньев. Для достижения поставленной цели используются методы механики.

2 Materials and Methods

В рамках работы рассматривается четырехосевая система позиционирования с двумя линейными и двумя поворотными степенями свободы. Для описания движения системы используем кинематическую схему, представленную на рис. 1.

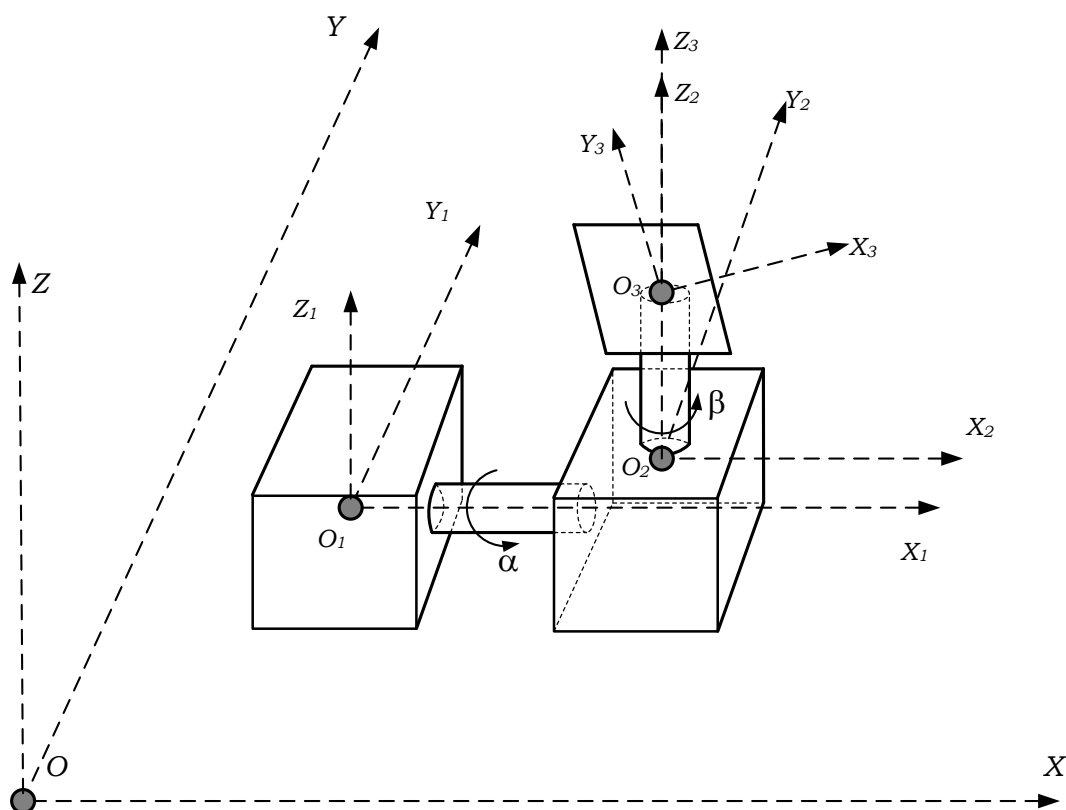


Fig. 1 - Kinematic scheme of the positioning system
Image by the author of the article

При моделировании кинематики введены следующие системы координат: $OXYZ$ – неподвижная система координат (СК); $O_1X_1Y_1Z_1$ – система координат, связанная с первым поворотным двигателем; $O_2X_2Y_2Z_2$ – система координат, связанная со вторым поворотным двигателем; $O_3X_3Y_3Z_3$ – система координат, связанная с выходным звеном (рабочим органом системы позиционирования), на котором закрепляются позиционируемые детали.

Связь между системами координат определяется следующими преобразованиями:

$$OXYZ \xrightarrow{\mathbf{r}(x_1, y_1, z_1)} O_1X_1Y_1Z_1 \xrightarrow{\mathbf{R}_{X_1}(\alpha)} O_2X_2Y_2Z_2 \xrightarrow{\mathbf{r}(x_2, y_2, z_2)} O_3X_3Y_3Z_3, \quad (1)$$

где x, y – перемещения первого и второго линейных двигателей системы, задающих характеризующих положение первого поворотного двигателя относительно неподвижной СК $OXYZ$; x_1, y_1, z_1 – характеризуют смещение начала координат O_1 относительно положения первого поворотного двигателя; x_2, y_2, z_2 – проекции радиус-вектора, соединяющего точки O_1 и O_2 , на оси подвижной СК $O_2X_2Y_2Z_2$; $\alpha = \angle(O_1Y_1, O_2Y_2)$, $\beta = \angle(O_2X_2, O_3X_3)$ – углы поворота выходных валов первого и второго поворотных двигателей. Здесь вектором $\mathbf{r}(x_i, y_i, z_i)$ обозначен вектор смещения на расстояния x_i, y_i, z_i вдоль соответствующих координатных осей; а матрицей $\mathbf{R}_{E_i}(\alpha_i)$ – матрица элементарного поворота вокруг произвольной оси E_i на произвольный угол α_i .

Положение точки A , в которую должен быть направлен электронный луч на детали, задается радиус-вектором $\mathbf{r}_{O_3A} = (X_A \ Y_A \ Z_A)^T$ в проекциях на оси подвижной СК $O_3X_3Y_3Z_3$. При этом положение этой же точки A в неподвижной СК $OXYZ$ задается радиус-вектором $\mathbf{r}_{OA} = (x_A \ y_A \ z_A)^T$. Указанные радиус-векторы связаны следующим векторным соотношением, записанном в проекции на оси неподвижной СК $OXYZ$:



$$\mathbf{r}_{OA} = \mathbf{r}(x + x_1, y + y_1, z_1) + \mathbf{R}_{X_1}(\alpha) \left[\mathbf{r}(x_2, y_2, z_2) + \mathbf{R}_{Z_2}(\beta) \mathbf{r}_{O_3A} \right], \quad (2)$$

где матрицы поворота имеют вид:

$$\mathbf{R}_{X_1}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{Z_2}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Проводя промежуточные вычисления, получим векторное соотношение (2) в виде трех скалярных выражений:

$$\begin{aligned} x_A &= x + x_1 + x_2 + X_A \cos \beta + Y_A \sin \beta, \\ y_A &= y + y_1 + \cos \alpha (y_2 - X_A \sin \beta + Y_A \cos \beta) + (z_2 + Z_A) \sin \alpha, \\ z_A &= z_1 - \sin \alpha (y_2 - X_A \sin \beta + Y_A \cos \beta) + (z_2 + Z_A) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение (4) являются решением прямой задачи кинематики, в которой по значениям углов поворота двигателей и перемещений выходных звеньев линейных приводов определяются координаты рабочего органа системы позиционирования.

Поскольку управляющими сигналами в системе позиционирования являются углы поворота двигателей и перемещения выходных звеньев линейных приводов, то для их нахождения необходимо получить решение обратной задачи кинематики.

Принимая во внимание, что электронный луч остается неподвижным и не изменяет свою ориентацию в пространстве (направление луча противоположно оси OZ неподвижной СК), получим координаты x_A, y_A неизменными в неподвижной СК. Значение координаты z_A зависит от геометрии соединяемых деталей и может быть использовано для корректировки фокусного расстояния электронного луча.

В силу требований технологического процесса электронно-лучевой сварки при соединении двух поверхностей необходимо, чтобы электронный луч был направлен вдоль биссектрисы угла между плоскостями указанных поверхностей. Данное требование может быть математически выражено условием параллельности единичного вектора $\mathbf{l} = (l_{x3} \ l_{y3} \ l_{z3})^T$ биссектрисы, вычисляемого по 3D моделям соединяемых деталей в проекциях на оси подвижной СК $O_3X_3Y_3Z_3$, и единичного вектора оси OZ . Таким образом, проекции единичного вектора \mathbf{l} на оси OX и OY неподвижной СК должны быть равны нулю. Уравнения, соответствующие указанным условиям, имеют вид:

$$\begin{aligned} l_{x3} \cos \beta + l_{y3} \sin \beta &= 0, \\ -l_{x3} \cos \alpha \sin \beta + l_{y3} \cos \alpha \cos \beta + l_{z3} \cos \alpha \cos \beta &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом указанных допущений исходными уравнениями для построения решения обратной задачи кинематики являются

$$\begin{aligned} x_A &= x + x_1 + x_2 + X_A \cos \beta + Y_A \sin \beta, \\ y_A &= y + y_1 + \cos \alpha (y_2 - X_A \sin \beta + Y_A \cos \beta) + (z_2 + Z_A) \sin \alpha, \\ l_{x3} \cos \beta + l_{y3} \sin \beta &= 0, \\ -l_{x3} \cos \alpha \sin \beta + l_{y3} \cos \alpha \cos \beta + l_{z3} \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналитическое решение уравнений (6) имеет вид:



$$\begin{aligned}
 x &= x_A - x_1 - x_2 - X_A \cos \beta - Y_A \sin \beta, \\
 y &= y_A - y_1 - \cos \alpha (y_2 - X_A \sin \beta + Y_A \cos \beta) - \sin \alpha (z_2 + Z_A), \\
 \beta &= \arctan \left(-\frac{l_{x3}}{l_{y3}} \right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\
 \alpha &= \arctan \left(-\frac{l_{y3} \cos \beta - l_{x3} \sin \beta}{l_{z3}} \right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Решение (4) прямой задачи кинематики может быть использовано для анализа погрешностей позиционирования системы, обусловленных дискретностью перемещений выходных звеньев приводов и их люфтами.

Решение (7) обратной задачи кинематики может быть использовано для передачи значений перемещений выходных звеньев двигателей в качестве управляющих сигналов через драйверы приводов системы позиционирования.

3 Results and Discussion

Проведем анализ погрешностей позиционирования системы. Обозначим: $\Delta x, \Delta y$ – суммарные погрешности линейных приводов; $\Delta \alpha, \Delta \beta$ – суммарные малые погрешности поворотных приводов. Линеаризуя уравнения (4) прямой задачи кинематики в окрестности текущей конфигурации системы позиционирования, имеем отклонения $\Delta x_A, \Delta y_A, \Delta z_A$ точки A от требуемого положения в виде:

$$\begin{aligned}
 \Delta x_A &= \Delta x + (-X_A \sin \beta + Y_A \cos \beta) \Delta \beta, \\
 \Delta y_A &= \Delta y + [(z_2 + Z_A) \cos \alpha - (y_2 - X_A \sin \beta + Y_A \cos \beta) \sin \alpha] \Delta \alpha - (X_A \cos \beta + Y_A \sin \beta) \cos \alpha \cdot \Delta \beta, \\
 \Delta z_A &= -[(z_2 + Z_A) \sin \alpha + (y_2 - X_A \sin \beta + Y_A \cos \beta) \cos \alpha] \Delta \alpha + (X_A \cos \beta + Y_A \sin \beta) \sin \alpha \cdot \Delta \beta.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Приведем оценку сверху для модулей погрешностей позиционирования. Для этого будем считать, координаты точки в СК, связанной с рабочим органом, равными максимальным размерам свариваемых деталей, т.е. $X_A = Y_A = Z_A = L_{\max}$. Помимо этого, тригонометрические функции от углов α, β заменим их предельными значениями, приводящими к максимальным погрешностям позиционирования.

Обозначив максимальные погрешности линейных приводов $|\Delta x| = |\Delta y| = \Delta_{\max}^m$ и поворотных двигателей $|\Delta \alpha| = |\Delta \beta| = \Delta_{\max}^{rad}$ и ограничив $\max(|y_2|, |z_2|) \leq L_{\max}$, получим:

$$\begin{aligned}
 |\Delta x_A| &\leq \Delta_{\max}^m + \sqrt{2} L_{\max} \Delta_{\max}^{rad}, \\
 |\Delta y_A| &\leq \Delta_{\max}^m + \left(2 + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) L_{\max} \Delta_{\max}^{rad}, \\
 |\Delta z_A| &\leq \left(2 + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) L_{\max} \Delta_{\max}^{rad}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

По полученным оценкам сверху (9) для погрешностей системы позиционирования можно формировать требования к точностям обработки угловых и линейных перемещений приводов, приведенных к выходным валам редукторов, при известных максимальных размерах свариваемых деталей.

В качестве числового примера примем, что погрешности в перемещениях выходных звеньев приводов равны $\Delta_{\max}^{rad} = 0,0014^\circ$, $\Delta_{\max}^m = 0,03$ мм. При этом максимальный размер перемещаемой детали равен $L_{\max} = 200$ мм. Тогда погрешности приводов поворотных перемещений не должны превышать значений:



$$|\Delta x_A| \leq 0,037 \text{ мм}, \quad |\Delta y_A| \leq 0,05 \text{ мм}, \quad |\Delta z_A| \leq 0,02 \text{ мм}. \quad (10)$$

Указанные погрешности позиционирования по координатам являются приемлемыми для применения в качестве составного элемента комплекса для электронно-лучевой сварки деталей.

4 Conclusions

Основные результаты работы:

1. Построена математическая модель кинематики четырехосевой прецизионной системы позиционирования, применяемой в качестве составного элемента комплекса для электронно-лучевой сварки деталей.
2. Найдено аналитическое решение обратной задачи кинематики системы позиционирования, которое может быть использовано для передачи управляющих сигналов на драйверы приводов звеньев системы.
3. По полученному решению прямой задачи кинематики системы позиционирования проведены оценки сверху для максимальных погрешностей позиционирования свариваемых деталей при заданных размерах деталей и погрешностях угловых и линейных приводов, обусловленных дискретностью их перемещений и люфтами.

Полученные результаты могут быть применены при разработке четырехосевой прецизионной системы позиционирования и программного обеспечения для управления её звеньями.

5 Fundings

Работа выполнена в рамках № 4301350 «Разработка прецизионной системы позиционирования для установки электронно-лучевой сварки», в целях реализации стратегического технологического проекта «Оборудование, новые материалы и технологии для обеспечения технологического лидерства предприятий топливно-энергетического комплекса России» Программы развития НИУ «МЭИ» на 2025-2036 годы в рамках реализации программы стратегического академического лидерства «ПРИОРИТЕТ-2030».

References

1. My, C.A., Dinh, N.C., Hung, T.Q., Hung, P.H., Nguyen, N.T., Luu, D.V., Bien, D.X., Duc, V.M. and Le, C.H. (2022) General Approach for Parameterization of the Inverse Dynamic Equation for Industrial Robot and 5-axis CNC Machine. *Advances in Asian Mechanism and Machine Science*, **113**, 433–442. https://doi.org/10.1007/978-3-030-91892-7_41
2. Ruegg, A. and Gygax, P. (1992) A Generalized Kinematics Model for Three- to Five-Axis Milling Machines and Their Implementation in a CNC. *CIRP Annals*, **41**(1), 547–550. [https://doi.org/10.1016/S0007-8506\(07\)61265-7](https://doi.org/10.1016/S0007-8506(07)61265-7)
3. Nguyen, H.Q., Pham, T.B., Vuong, L.C., Nguyen, D.N. and Ngo, N.K. (2021) Generalized Kinematics Error Prediction of CNC Milling Machines by Using Simulation Method. *Advances in Asian Mechanism and Machine Science*, **113**, 89–100. https://doi.org/10.1007/978-3-030-91892-7_9
4. My, C.A. and Bohez, E.L.J. (2019) A novel differential kinematics model to compare the kinematic performances of 5-axis CNC machines. *International Journal of Mechanical Sciences*, **163**, 105–117. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105117>
5. Saharov, A.V. (2024) Determination of technological capabilities of a CNC portal milling machine. *Stankoinstrument*, **34**(1), 46–49. <https://doi.org/10.22184/2499-9407.2024.34.1.46.49>
6. Merghache, S.M. and Hamdi, A. (2020) Numerical evaluation of geometrical errors of three-axes CNC machine tool due to cutting forces—case: milling. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **111**, 1683–1705. <https://doi.org/10.1007/s00170-020-06211-y>



7. Bohez, E.L.J. (2002) Five-axis milling machine tool kinematic chain design and analysis. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, **42(4)**, 505–520. [https://doi.org/10.1016/S0890-6955\(01\)00134-1](https://doi.org/10.1016/S0890-6955(01)00134-1)
8. Sorby, K. (2007) Inverse kinematics of five-axis machines near singular configurations. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, **47(2)**, 299–306. <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2006.03.011>
9. Hu, S., Zhang, M., Zhang, B., Chen, X. and Yu, W. (2016) Design and accuracy analysis of a metamorphic CNC flame cutting machine for ship manufacturing. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, **29**, 930–943. <https://doi.org/10.3901/CJME.2016.0425.059>
10. Gordon, S. and Hillery, M.T. (2000) Linear Motor based High Speed CNC milling Machine. *Proceedings of the 33rd International MATADOR Conference*, 513–524. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0777-4_80
11. Singh, M., Duarah, P., Narnaware, S. and Joshi, S.N. (2023) Parallel Kinematics-Based Mechanism and Its Industrial Application in CNC Machine Tool Development. *Low Cost Manufacturing Technologies*, 221–239. https://doi.org/10.1007/978-981-19-8452-5_18
12. Martinov, G.M., Sokolov, S.V., Pushkov, R.L., Obukhov, A.I. and Evstafieva, S.V. (2021) Control of the machine tools with variable kinematics. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **117**, 2331–2339. <https://doi.org/10.1007/s00170-021-07339-1>
13. Takeuchi, Y., Wada, K., Hisaki, T. and Yokoyama, M. (1994) Study on Post-processor for 5-Axis Control Machining Centers. *Journal of the Japan Society for Precision Engineering*, **60(1)**, 75–79. <https://doi.org/10.2493/jjspe.60.75>
14. Kombarov, V.V. and Sorokin, V.F. (2014) Limitation of curved path chord error during determination of control cycle frequency for CNC system considering technological parameters of equipment. *Advanced Technologies and Mechanical Engineering Systems*, **47(1)**, 158–164. https://www.researchgate.net/publication/337170981_Ogranicenije_pogresnosti_aproksimacii_krivolinejnyh_traektorij_pri_vybore_castoty_cikla_upravljenja_sistemy_CPU_s_ucetom_tehnologiceskih_parametrov_oborudovanja
15. Kombarov, V.V. and Sorokin, V.F. (2012) Determination of rational CNC control cycle frequency considering limitations of kinematic parameters at high-speed machining. *Aerospace Engineering and Technology*, **94(7)**, 41–46. https://www.researchgate.net/publication/337170713_Opredelenie_racionalnoj_castoty_cikla_upravljenja_sistemy_CPU_s_ucetom_ogranicenia_kinematiceskih_parametrov_pri_vysokoskorostnoj_obrabortke
16. Maletića, J. and Živanovićb, S. (2022) Verification of inverse kinematic equations for a five-axis machine tool with a spindle tilting configuration. *Advanced Technologies and Materials*, **47(1)**, 33–38. <https://doi.org/10.24867/ATM-2022-1-006>
17. Ramadhan, N.J., Indrawanto, I. and Nguyen, H.D. (2023) Five-axis parallel mechanism system (PMS) CNC partial link control system based on modified inverse kinematic of 6-DOF UPS parallel manipulator. *Journal of Mechatronics, Electrical Power and Vehicular Technology*, **14(1)**, 1–10. <https://dx.doi.org/10.14203/j.mev.2023.v14.1-10>
18. Gushchin, A., Larshin, V. and Marchuk, V. (2023) CNC Machine Adaptive Control Mechatronic Module. *Proceedings of the 8th International Conference on Industrial Engineering*, Springer, 154–163. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14125-6_16
19. Zarkandi, S. (2018) Kinematic and dynamic modeling of a planar parallel manipulator served as CNC tool holder. *International Journal of Dynamics and Control*, **6**, 14–28. <https://doi.org/10.1007/s40435-016-0292-4>
20. Rolland, L. (2015) Path Planning Kinematics Simulation of CNC Machine Tools Based on Parallel Manipulators. *Motion and Operation Planning of Robotic Systems. Mechanisms and Machine Science*, **29**, 147–192. https://doi.org/10.1007/978-3-319-14705-5_6



21. Chen, C-T. and Chi, H-W. (2008) Singularity-free trajectory planning of platform-type parallel manipulators for minimum actuating efforts and reactions. *Robotica*, **26(3)**, 371–384. <https://doi.org/10.1017/S0263574707004043>
22. Bohigas, O., Henderson, M. E., Ros, L. and Porta, J. M. (2012) A singularity-free path planner for closed-chain manipulators. *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2128–2134, <https://doi.org/10.1109/ICRA.2012.6224899>
23. Briot, S. and Arakelian, V. (2008) Optimal force generation in parallel manipulators for passing through the singular positions. *The International Journal of Robotics Research*, **27(2)**, 967–983. <https://doi.org/10.1177/02783649080944>
24. Carbone, G., Gomez-Bravo, F. and Selvi, O. (2012) An experimental validation of collision-free trajectories for parallel manipulators. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, **40(4)**, 414–433. <https://doi.org/10.1080/15397734.2012.687288>
25. Obrovac, K., Staroveski, T., Drobilo, L. and Didak, L. (2025) Development and Validation of a Five-Axis CNC Machine Tool for Orthosis Mold Manufacturing. *Journal of Engineering Science*, **12(2)**, 1–9, [https://doi.org/10.21272/jes.2025.12\(2\).a1](https://doi.org/10.21272/jes.2025.12(2).a1)