This publication is licensed under a CC BY-NC 4.0

Research Article
ISSN 2658-5553
Received: February 19, 2025 Accepted: March 6, 2025 Published: March 24, 2025

Formulas for the first two frequencies of natural oscillations of a regular truss

Kirsanov, Mikhail Nikolaevich[1]
[1] Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation; c216@ya.ru (K.M.N.)
Correspondence:* email c216@ya.ru

Keywords:

Lattice truss; Natural oscillation frequency; Induction; Maple; Analytical solution; Second frequency of oscillations; Dunkerley method

The object of research is the frequencies of natural oscillations of a regular spacer flat lattice truss. The mass of the truss is conventionally located at its nodes. Only small vertical oscillations of the masses are considered. The rods of the structure are assumed to be linearly elastic. **Method**. The modified Dunkerley method is used to derive the formula for the dependence of the first natural frequency of the truss free oscillations. For the second frequency, the form of dependence on the number of panels is taken from the solution of the problem of the first frequency with correction factors that are calculated from the numerical solution by the collocation method at three points. **Results**. For the first two frequencies of truss oscillations, compact calculation formulas for the dependence on the number of panels are obtained, allowing one to estimate oscillations of a truss with an arbitrary number of panels without loss of accuracy. For an odd number of panels in half a span, the kinematic variability of the structure was discovered and confirmed by the distribution of velocities.

1 Introduction

В практике динамических исследований конструкций чаще всего востребованы первые две собственные частоты. Если для приближенной оценки первой (наименьшей) собственной частоты есть, по крайней мере, два расчетных аналитических метода (Рэлея и Донкерлея), то для второй частоты аналитические оценки в общем случае неизвестны. Частоты собственных колебаний, как правило, рассчитываются численно в стандартных инженерных пакетах [1], [2]. Известны и аналитические решения с применением системы компьютерной математики, например, Maple [3] для регулярных плоских конструкций, дающие приближенную зависимость верхней границы первой собственной частоты от числа панелей. Для аналитических расчетов инженерных конструкций используется также компьютерная система Mathematica [3], [4]. В [5] получена формула для прогиба пространственной регулярной фермы в зависимости от числа панелей. Для аналитической оценки зоны резонансной безопасности плоской фермы в [6], [7] был использован метод индукции. Эта же задача решена для балочной фермы со сложной решеткой в [8], исследованы также спектры регулярных ферм различных порядков. Формулы зависимости первой частоты от числа панелей для плоских регулярных ферм получены в [9], [10]. Аналитическая зависимость прогиба плоской регулярно фермы от числа панелей для различных конфигураций решетки исследована в [11]. Оценка основной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы выведена в [12] с использованием системы Maple. Оценки прогиба и частоты собственных колебаний шарнирно-стержневой регулярной рамы с произвольным числом панелей получены в [13]. Формула для нижней оценки первой частоты собственных колебаний плоской регулярной балочной фермы с прямолинейным верхним поясом выведена в [14]. В [15] с помощью формулы Максвелла - Мора получены формулы для прогиба плоской фермы с произвольным числом панелей. Двух сторонняя оценка первой частоты (методом Донкерлея снизу и Рэлея сверху) найдена в [16]. В [17] с использованием анализа собственных значений и оценки Рэлея численно выполнен частотный анализ балки, несущей несколько точечных масс в разных местах.

This publication is licensed under a CC BY-NC 4.0

Аналитические методы с использованием системы компьютерной математики использованы в [18], [19] для решения задач строительной механики. Приближенный аналитический подход к анализу ортотропной прямоугольной пластины с трещиной на основе метода суперпозиции с использованием двух решений, полученных методом начальных функций, и приближенного аналитического решения в виде тригонометрических полиномов применялся в [20]. В [21] выполнен кинематический анализ и найден спектр собственных частот плоской фермы. Сравнение аналитических решений задачи о прогибе плоской фермы с численным проведен в [22]. В этой работе для сравнения решений и их проверки использован многофункциональный программный комплекс «Лира», предназначенный для проектирования и расчета гражданских и инженерных конструкций. Аналитические оценки решения задачи о деформации плоской фермы с учетом ползучести получено в [23]. В [24] в системе Maple получены формулы для расчета первой частоты колебаний двухпролетной фермы с произвольным числом панелей.

В настоящей работе выводится формула для основной частоты собственных колебаний плоской фермы с двойной решеткой, и впервые предлагается алгоритм вывода приближенной формулы для расчета второй собственной частоты в зависимости от числа панелей. Ранее для решения таких задач использовались только численные методы [25]. Для решения поставленной задачи используется упрощенный вариант метода Донкерлея [26] и метод индукции обобщения частных решений на общее. Анализируется возможная мгновенная кинематическая изменяемость конструкции фермы при определенном числе панелей.

2 Materials and Methods

2.1 Truss design and forces in members

Рассматриваемая ферма представляет собой плоскую решетчатую конструкцию высотой $2h$ с $2n$ панелями длиной a, пролетом $L_0 = 2a(n+1)$ и прямолинейными поясами (рис. 1). Короткие (крайние) раскосы имеют длину $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, длинные — длину $2c$ и $3c/2$. Обе опоры — неподвижные шарниры. Таким образом, ферма внешне статически неопределима. Это особенность конструкции создает сложности при определении реакций опор.

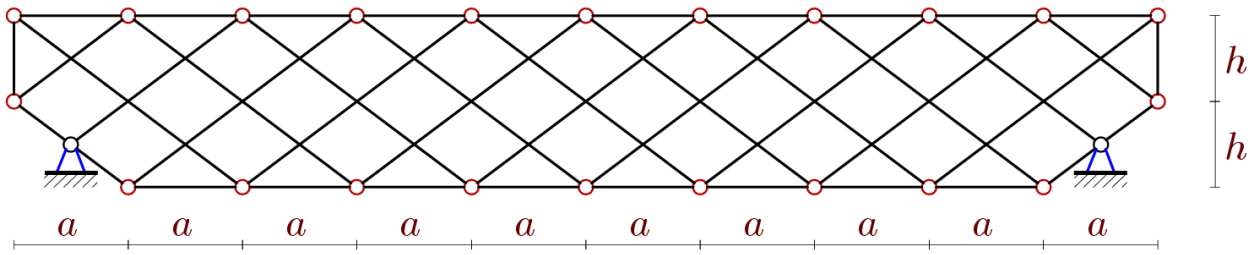

Рис. 1 – Схема фермы, n=4
Fig. 1 –Truss scheme, n=4

Конструкция содержит $N = 4n + 8$ узлов и $\eta = 8n + 16$ стержней, в число которых включены и четыре стержня, моделирующие неподвижные опоры. Из системы уравнений равновесия узлов в проекциях определяются усилия в стержнях одновременно с реакциями опор, необходимые для расчета жесткости конструкции. Для составления системы уравнений равновесия стержни и узлы нумеруются (рис. 2).

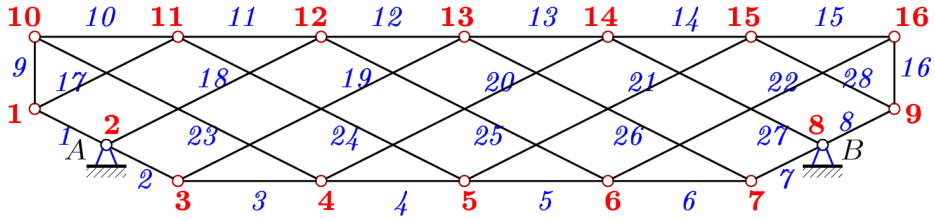

Рис. 2 – Схема фермы. Нумерация узлов и стержней, n=2
Fig. 2 –Truss scheme. Numbering of nodes and rods, n=2

This publication is licensed under a CC BY-NC 4.0

В параметрической форме для *n* числа панелей в половине пролета задаются координаты узлов фермы. Начало координат выбирается в узле 1. На языке компьютерной математики Maple ввод координат с использованием операторов цикла фрагмент программы имеет следующий вид:

```
> L0:=2*n*a+2*a:
> x[1]:=0;y[1]:=h; x[2]:=a/2;y[2]:=h/2:
> for i to 2*n+1 do x[i+2]:=i*a; y[i+2]:=0; end:
> x[2*n+4]:=L0-a/2: y[2*n+4]:=h/2: x[2*n+5]:=L0:y[2*n+5]:=h:
> for i to 2*n+3 do x[i+2*n+5]:=a*i-a; y[i+2*n+5]:=2*h; end:
```

Ввод порядка соединения стержней в узлы производится с помощью задания специальных упорядоченных списков номеров концов стержней. Соответствующая программа имеет вид:

```
> for i to 2*n+4 do T[i]:=[i,i+1];od:
> T[2*n+5]:=[1,2*n+6]:
> for i to 2*n+2 do T[i+2*n+5]:=[i+2*n+5,i+2*n+6]; od:
> T[4*n+8]:=[4*n+8,2*n+5]:
```

Элементы списков `T[i]` — это номера условного начала и конца стержня *i*. Матрица системы уравнений равновесия узлов состоит из направляющих косинусов усилий, вычисленных по этим данным. Для решения системы алгебраических уравнений используются встроенные в Maple операторы. Для решения системы уравнений в символьной форме наиболее эффективен метод обратной матрицы.

2.2 Kinematic variability

Первые же пробные расчеты усилий в стержнях фермы показывают, что при определенном числе панелей независимо от размеров стержней и приложенной узловой нагрузки определитель системы уравнений равновесия узлов обращается в ноль. Это свидетельствует о кинематической изменяемости конструкции, недопустимой для сооружений. Выясняется, что при нечетном числе панелей в половине пролета узлы фермы могут приобретать мгновенные виртуальные скорости. Один из вариантов решения задачи кинематики при *n* = 1, подтверждающий этот факт, приведен на рисунке 3.

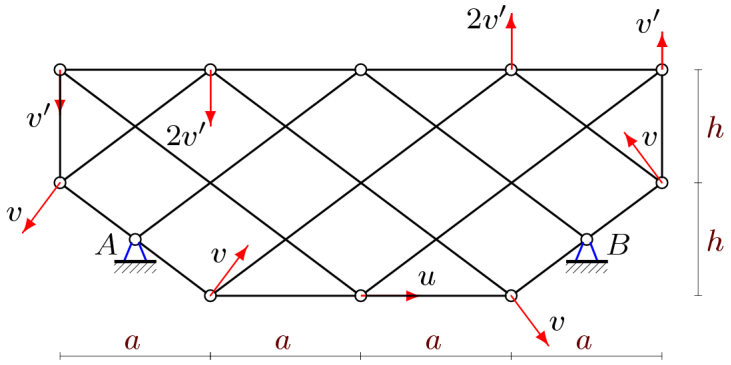

Рис. 3 – Виртуальные скорости узлов, n=1
Fig. 3 – Virtual node velocities, n=1

Очевидны кинематические соотношения: $v'/a = v/c = u/h$. Аналогичную картину распределения скоростей можно построить и для любого другого *нечетного* значения *n*. Таким образом, вывод основных формул зависимостей частоты колебаний от числа панелей необходимо производить только для *четных* значений: $n = 2k,\ k = 1, 2, \ldots$, а найденная особенность фермы напоминает лишний раз, что использование готовых решений, полученных для одних параметров конструкции, в конструкциях с другими параметрами следует выполнять с осторожностью. В данном случае фермы, отличающиеся друг от друга всего на одну панель, могут вести себя совершенно разным образом. Одна ферма будет вполне жесткой конструкцией, несущей нагрузку, другая — кинематически изменяемым механизмом, использование которого в сооружениях недопустимо.

2.3 The first frequency. Dunkerley method

При моделировании инерционных свойств фермы предполагается, что ее масса равномерно распределена по узлам, а колебания узлов происходят только по вертикали. Обе опоры фермы

This publication is licensed under a CC BY-NC 4.0

неподвижны, поэтому горизонтальные колебания узлов незначительны и в этом подходе не учитываются. Формула Донкерлея для первой частоты собственных колебаний ω_D имеет вид [5], [6], [7]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{j=1}^{N} \omega_j^{-2}. \tag{1}$$

Здесь введено обозначение ω_j для парциальной частоты колебаний массы μ в узле *j* по вертикали. В [20] использован упрощенный вариант этой формулы:

$$\left(\omega_1^*\right)^{-2} = \mu \sum_{j=1}^{N} \delta_j = \mu \delta^{\max} N / 2 = \mu \Delta_k, \tag{2}$$

где N — число степеней свободы системы масс, равное числу узлов, $\delta^{\max}$ — наибольшее по всем узлам значение вертикального прогиба δ_j от действия вертикальной единичной силы на узел *j*. Упрощение метода Донкерлея состоит в способе расчета суммы в (1). Сумма вычисляется по теореме о среднем. При этом существенно упрощаются и ускоряются символьные преобразования в Maple, но теряется свойство нижней границы исходного метода Донкерлея. В рассматриваемой ферме можно предположить, что максимальный прогиб будет в среднем узле с номером *n*+3 нижнего пояса. По формуле Максвелла – Мора вычисляется $\delta^{\max}$:

$$\delta^{\max} = \sum_{i=1}^{\eta} \left(S_i^{(n+3)}\right)^2 l_i / (EF),$$

где $S_i^{(n+3)}$ — усилие в стержне с номером i от действия вертикальной единичной силы, приложенной к среднему узлу *n*+3. Жесткость *EF* принимается одинаковой для всех стержней. Чтобы получить зависимость решения от количества панелей n в ферме требуется метод индукции. Коэффициенты Δ_k в (2) для различных чисел панелей *k*=1,2,.... , рассчитанные по формуле Максвелла – Мора, составляют последовательность:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 2(81a^3 + 51c^3 + 10h^3) / (EFh^2),\\
\Delta_2 &= 3(49a^3 + 9c^3 + 2h^3) / (EFh^2),\\
\Delta_3 &= 4(225a^3 + 123c^3 + 10h^3) / (EFh^2),\\
\Delta_4 &= 5(257a^3 + 17c^3 + 2h^3) / (EFh^2),\\
\Delta_5 &= 6(529a^3 + 195c^3 + 10h^3) / (EFh^2),...
\end{aligned}$$

Для вычисления общего члена этой последовательности применяются операторы *rgf_findrecur* и *rsolve* пакета *genfunk* системы Maple, позволяющие методом индукции составить и решить рекуррентные уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты при кубических степенях размеров. Чтобы получить итоговую расчетную формулу достаточно найти решения для четырнадцати ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей. Общая формула имеет вид:

$$\Delta_k = 8(k+1)\frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3}{h^2 EF}, \tag{3}$$

где коэффициенты находятся как решения рекуррентных линейных однородных уравнений:

$$\begin{aligned}
C_1 &= (8k^3 + 12k^2(-1)^k + 8(11 - 9(-1)^k)k - 42(-1)^k + 45) / 24,\\
C_2 &= (4(5 - 4(-1)^k)k - 7(-1)^k + 8) / 8, \quad C_3 = (3 - 2(-1)^k) / 4.
\end{aligned} \tag{4}$$

Приближенная зависимость первой частоты от количества панелей и геометрических параметров конструкции примет вид:

This publication is licensed under a CC BY-NC 4.0

$$\omega_1^* = h\sqrt{\frac{EF}{8\mu(k+1)\left(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3h^3\right)}}. \tag{5}$$

2.4 The second frequency

Вторая частота собственных колебаний конструкций на практике используется реже. Однако для полного представления о динамике конструкции, в частности, для предсказаний резонансных явлений на высших частотах, эта величина бывает полезна. Численный расчет второй частоты не представляет особой сложности и производится по той же схеме, что и расчет первой частоты с использованием прикладных инженерных программ. Аналитическое же решение позволяет достаточно просто оценить численное решение и провести его анализ.

Для получения аналитической зависимости второй частоты ω_2^* собственных колебаний узлов фермы от числа панелей предлагается следующий алгоритм. Известно свойство подобия кривых зависимостей первой и второй частоты колебаний от порядка фермы [6], [7]. Если предположить, что для второй частоты решение имеет вид (3-5), но с дополнительными множителями γ_1, γ_2, γ_3 , то у коэффициентов в (3) для второй частоты зависимость будет следующей:

$$\left(\omega_2^*\right)^{-2} = \mu N(\gamma_1 C_1 a^3 + \gamma_2 C_2 c^3 + \gamma_3 C_3 h^3)/(h^2 EF). \tag{6}$$

Определить три коэффициента γ_1, γ_2, γ_3 можно методом сравнения численного и аналитического решений для трех значений высоты *h*. Три уравнения (6), рассчитанные для трех значений *h*, образуют систему уравнений с тремя неизвестными γ_1, γ_2, γ_3. Из этой системы находятся необходимые поправочные коэффициенты. Для второй частоты решение приобретает вид:

$$\omega_2^* = h\sqrt{\frac{EF}{8\mu(k+1)\left(\gamma_1 C_1 a^3 + \gamma_2 C_2 c^3 + \gamma_3 C_3 h^3\right)}}. \tag{7}$$

Численные значения собственных частот находятся с помощью оператора *Eigenvalues* из пакета *LinearAlgebra* системы Maple для вычисления собственных чисел матрицы.

3 Results and Discussion

3.1 Results

Первая частота. Для оценки аналитических методов расчета первых двух частот свободных колебаний фермы можно выполнить их сравнение с численными решениями, полученными для фермы с *N* степенями свободы.

Приведем пример численного расчета первой собственной частоты колебаний ферм с модулем упругости материала стержней $E = 2.1\cdot 10^5$ МПа, массами в узлах $\mu = 200\ кг$, размерами: $a = 3\ м,\ h = 2\ м$ и площадью поперечных сечений стержней $F = 9\ см^2$. При численном нахождении собственных чисел используется стандартный оператор *Eigenvalues* системы Maple специализированного пакета линейной алгебры *LinearAlgebra*. Кривые зависимости первой частоты от числа панелей, рассчитанные численно (пунктир) и по выведенной формуле (5), показаны на рисунке 4. В зависимости от четности параметра *k* аналитический метод (сплошная линия) дает либо немного заниженное, либо завышенное значение собственной частоты.

This publication is licensed under a CC BY-NC 4.0

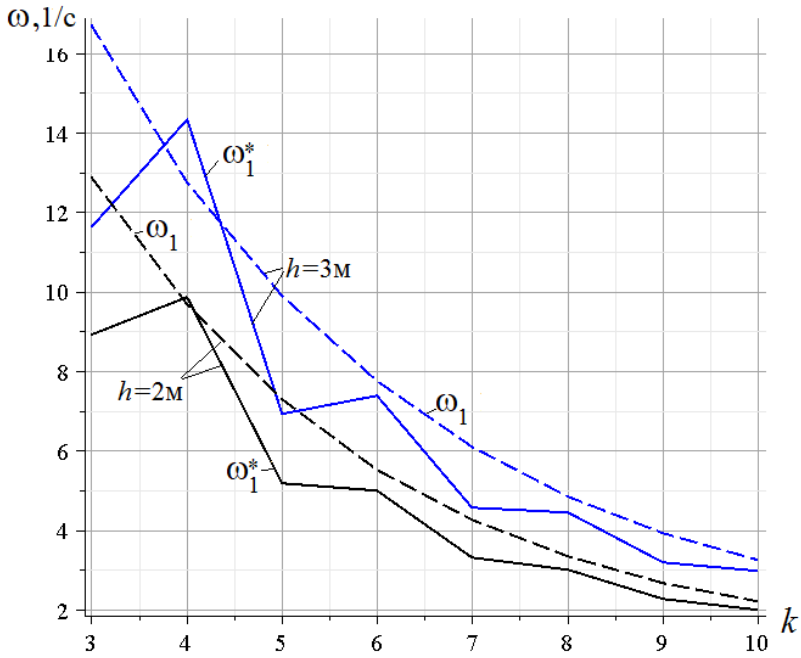

Рис. 4 – Зависимость первой частоты собственных колебаний от количества панелей. Численное решение ω_1 и аналитическая оценка ω_1^*

Fig. 4 – Frequency dependence on the number of panels. Numerical solution ω_1 and analytical assessment ω_1^*

Уточнить погрешность аналитического решения по сравнению с численным можно по величине относительной погрешности $\varepsilon = |\omega_1 - \omega_1^*| / \omega_1$. На рисунке 5 показано, что погрешность приближенного метода существенно зависит от четности параметра *k*. Для четных значений *k* погрешность в несколько раз меньше, чем для нечетных. С увеличением числа панелей погрешность неравномерно, скачкообразно, уменьшается. Погрешность тем меньше, чем меньше высота конструкции *h*.

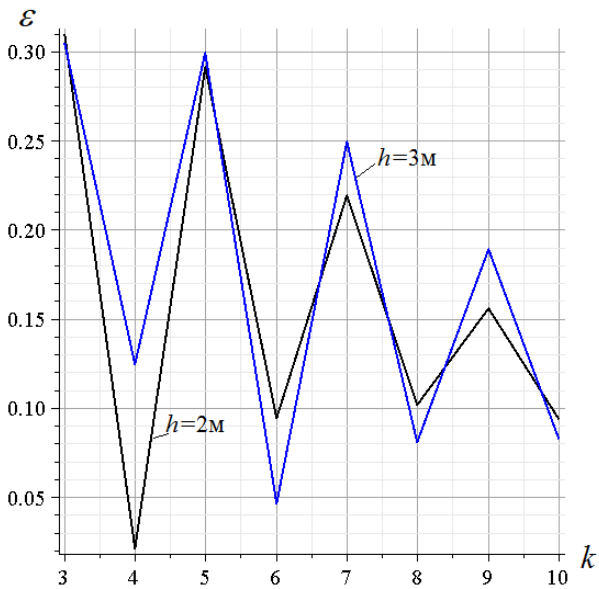

Рис. 5 – Погрешность аналитического решения в зависимости от количества панелей
Fig. 5 – Errors of analytical solution depending on the number of panels

Вторая частота. При вычислении поправочных коэффициентов в формуле для второй частоты (7) выбираются базисные значения второй частоты, полученной численно для *n* = 4 при

This publication is licensed under a CC BY-NC 4.0

$a = 2м$, $h = 1м$, $h = 2м$ и $h = 3м$: $\omega_I = 36.779c^{-1}$, $\omega_{II} = 54.432c^{-1}$, $\omega_{III} = 58.898c^{-1}$. Решение системы уравнений на основе уравнения (6) дает следующие безразмерные коэффициенты: $\gamma_1 = 0.161$, $\gamma_2 = 1.655$, $\gamma_3 = 1.558$. Аналогично, при тех же значениях высоты и $a = 3м$ находятся частоты $\omega_I = 21.407c^{-1}$, $\omega_{II} = 36.678c^{-1}$ и $\omega_{III} = 44.444c^{-1}$. Соответствующие этому размеру панели коэффициенты имеют вид $\gamma_1 = 0.159$, $\gamma_2 = 1.661$, $\gamma_3 = 1.517$. Кривые зависимости второй частоты для двух значений размера панели a отображены на рисунке 6. Расчет выполнялся для значения высоты $h = 2м$. Кривые, полученные численно, выделены пунктиром. Результат показывает хорошую точность выведенной формулы.

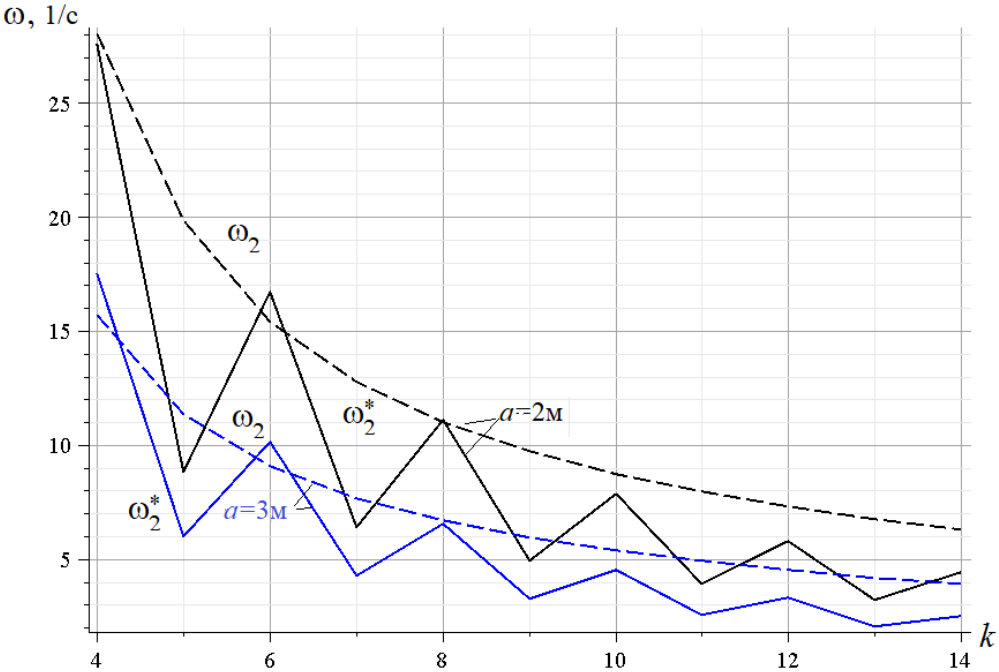

Рис. 6 – Вторая собственная частота в зависимости от числа панелей
Fig. 6 – Second natural frequency depending on the number of panels

4 Conclusions

Основные результаты работы:

1. Предложена схема плоской статически определимой распорной фермы регулярного типа, допускающая аналитическое решение задачи о собственных частотах колебаний.
2. Анализ рассматриваемой конструкции фермы с двойной решеткой показал ее кинематическую изменяемость при нечетном числе панелей.
3. Разработана математическая модель фермы для расчета первой и второй собственных частот колебаний в аналитическом виде.
4. Выведены формулы зависимости первых двух частот от числа панелей.
5. Дана оценка точности аналитического решения.

References

1 Ignatyev, A. V. and Ignatyev, V.A. (2016) On the Efficiency of the Finite Element Method in the Form of the Classical Mixed Method. *Procedia Engineering*, Elsevier Ltd, **150**, 1760–1765. https://doi.org/10.1016/J.PROENG.2016.07.167

2 Vatin, N., Havula, J., Martikainen, L., Sinelnikov, A.S., Orlova, A. V. and Salamakhin, S. V. (2014) Thin-Walled Cross-Sections and Their Joints: Tests and FEM-Modelling. *Advanced Materials Research*, **945–949**, 1211–1215. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.945-949.1211

3 Zotos, K. (2007) Performance Comparison of Maple and Mathematica. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, **188**, 1426–1429. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.008

4 Ozbasaran, H. (2017) SolveTruss v1.0: Static, Global Buckling and Frequency Analysis of 2D and 3D Trusses with Mathematica. *SoftwareX*, Elsevier B.V., **6**, 135–140.

This publication is licensed under a CC BY-NC 4.0

https://doi.org/10.1016/j.softx.2017.05.004

5 Astakhov, S.V. (2024) Analytical Assessment of the Deflection of the Rod Model of a Four-Slope Roof Frame. *Structural mechanics and structures*, **43**, 34–41. https://doi.org/10.36622/2219-1038.2024.43.4.003

6 Luong, C.L. (2024) Resonance Safety Zones of a Truss Structure with an Arbitrary Number of Panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **113**, 11304. https://doi.org/10.4123/CUBS.113

7 Luong, C.L. (2024) Dependence of the Region of Resonantly Safe Frequencies on the Dimensions of a Statically Determinate Flat Truss. *Structural Mechanics and Structures*, **41**, 16–26. https://doi.org/10.36622/2219-1038.2024.41.2.002

8 Luong, C.L. and Kirsanov, M.N. (2024) Effect of Truss Height on the Safe Frequency Region of a Statically Determined Flat Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **111**, 11003–11003. https://doi.org/10.4123/CUBS.110.3

9 Petrichenko, E.A. (2020) Lower Bound of the Natural Oscillation Frequency of the Fink Truss. *Structural Mechanics and Structures*, **26**, 21–29. https://www.elibrary.ru/download/elibrary_44110287_71394021.pdf

10 Manukalo, A.S. (2023) Analysis of a Planar Sprengel Truss First Frequency Natural Oscillations Value. *Structural Mechanics and Structures*, **37**, 54–60. https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.006

11 Dai, Q. (2021) Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. *AlfaBuild*, **17**, 1701. https://doi.org/10.34910/ALF.17.1

12 Komerzan E. V. Maslov A. N. (2023) Estimation of the L-Shaped Spatial Truss Fundamental Frequency Oscillations. *Structural mechanics and structures,* **37**, 17–26. https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.004

13 Luong, C.L. (2024) Estimates of Deflection and Natural Frequency of Vibrations of a Hinged-Rod Truss with an Arbitrary Number of Panels. *Structural mechanics and structures*, **43**, 42–53. https://doi.org/10.36622/2219-1038.2024.43.4.004

14 Shchigol, E.D. (2023) The Formula for the Lower Estimate of the Natural Oscillations of a Flat Regular Girder Truss with a Rectilinear Upper Belt. *Structural Mechanics and Structures*, **37**, 46–53. https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.005

15 Ivanitskii, A.D. (2022) Formulas for Calculating Deformations of a Planar Frame. *Structural mechanics and structures*, Voronezh State Technical University, **34**, 90–98. https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.34.3.007

16 Vorobev, O.V. (2020) Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **92**, 9204–9204. https://doi.org/10.18720/CUBS.92.4

17 Low, K.H. (2003) Natural Frequencies of a Beam-Mass System in Transverse Vibration: Rayleigh Estimation versus Eigenanalysis Solutions. *International Journal of Mechanical Sciences*, Pergamon, **45**, 981–993. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2003.09.009

18 Matrosov, A. V. (2022) An Exact Analytical Solution for a Free-Supported Micropolar Rectangle by the Method of Initial Functions. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, Birkhauser, **73**. https://doi.org/10.1007/S00033-022-01714-Y

19 Matrosov, A. V. (2019) Computational Peculiarities of the Method of Initial Functions. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, Springer Verlag, **11619 LNCS**, 37–51. https://doi.org/10.1007/978-3-030-24289-3_4

20 Goloskokov, D.P. and Matrosov, A. V. (2018) Approximate Analytical Approach in Analyzing an Orthotropic Rectangular Plate with a Crack. *Materials Physics and Mechanics*, Institute of Problems of Mechanical Engineering, **36**, 137–141. https://doi.org/10.18720/MPM.3612018_15

21 Kirsanov, M.N. and Xuan, J. (2023) Kinematic Analysis, Spectrum of Natural Frequencies, and Formula for the First Frequency of a Planar Truss. *AlfaBuild*, **27**, 2703. https://doi.org/10.57728/ALF.27.3

22 Tinkov, D. V. (2015) Comparative Analysis of Analytical Solutions to the Problem of Truss Structure Deflection. *Magazine of Civil Engineering*, **57**. https://doi.org/10.5862/MCE.57.6

23 Tinkov, D. V. (2016) The Optimum Geometry of the Flat Diagonal Truss Taking into Account the Linear Creep. *Magazine of Civil Engineering*, **61**, 25–32. https://doi.org/10.5862/MCE.61.3

24 Petrenko, V.F. (2021) The Natural Frequency of a Two-Span Truss. *AlfaBuild*, 2001.

This publication is licensed under a CC BY-NC 4.0

https://doi.org/10.34910/ALF.20.1
25 Yuan, T., Fan, W., Ren, H. and Liu, Y. (2025) Efficient Reduced Order Modeling for Nonlinear Dynamic Analysis of Beamlike Truss Structures. *Aerospace Science and Technology*, Elsevier Masson, **159**, 109952. https://doi.org/10.1016/J.AST.2025.109952
26 Kirsanov, M. (2023) Simplified Dunkerley Method for Estimating the First Oscillation Frequency of a Regular Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **108**. https://doi.org/10.4123/CUBS.108.1