This publication is licensed under a CC BY-NC 4.0

Research Article
ISSN 2658-5553
Received: February 9, 2025 Accepted: February 24, 2025 Published: March 14, 2025

Formulas for calculating the deflection and natural frequency of vibrations of a planar arched truss

Kirsanov, Mikhail Nikolaevich[1]
Gribova, Olga Valerievna[1]
[1] Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation; c216@ya.ru (K.M.N.); gribovaov@mail.ru (G.O.V.)
Correspondence:* email c216@ya.ru

Keywords:

Arched truss; Fundamental frequency; induction; Maple; Dunkerley method

Abstract:

The object of research is a flat statically determinate arched truss with an arbitrary number of panels in the span. Formulas for the deflection and the first natural frequency of oscillations of the truss are derived. The equilibrium equations of the nodes are compiled and solved in the Maple computer mathematics system. Formulas are derived for the deflection of the middle node of the lower chord of the truss in the case of a uniform vertical load on the lower or upper chord. **Method.** A version of the Dunkerley method is used to calculate the natural frequency of oscillations of concentrated masses in the truss nodes. It is assumed that the masses oscillate vertically. **Results.** Good agreement is obtained between the results of the analytical solution and the numerical solution calculated considering all degrees of freedom of the system. It is shown that with an increase in the number of panels, the oscillation frequency decreases monotonically.

1 Introduction

Аналитические решения задачи о собственных колебаний строительных конструкций редки. Для расчета прогибов и собственной частоты колебаний ферм как правило привлекаются численные методы, основанные на методе конечных элементов [1], [2]. Исключением являются некоторые простые статически определимые схемы стержневых конструкций, для которых возможны и аналитические решения с использованием систем компьютерной математики [3], [4]. Особенно практичны такие решения для регулярных систем с периодической структурой, если в них учитывается число панелей [5], [6]. Основные идеи расчета регулярных статически определимых систем были заложены Hatchinson R., Fleck N. [7], [8]. Большой вклад в теорию и практику расчета регулярных систем внес Kaveh A. [9], [10]. Известны также труды Игнатьева В.А., Игнатьева А.В. [11] и работы Галишниковой В.В [12]. Аналитические решения для элементов строительных конструкций в системе компьютерной математики Maple с применением метода начальных функций получили Матросов А.В и Голосколов Д.П. [13], [14]. Формулы для деформаций пространственной трехгранной регулярной конструкции с двойной решеткой методом индукции выведены в [15]. Модифицированный метод Донкерлея, дающий уточненное значение нижней границы первой собственной частоты колебаний плоской арочной фермы в компактной аналитической форме, применен в [16]. Аналитический расчет прогибов и собственной частоты фермы регулярной пространственной шестигранной башни выполнен в системе Maple в [17]. Границы зоны частот резонансной безопасности на основе численного и аналитического расчета собственных частот плоской статически определимой фермы с крестообразной решеткой найдены в [18]. Ряд простых аналитических решений для плоских ферм с произвольным числом панелей найден в работах [19]–[21]. Численные методы решения задач оптимизации ферм использовались в [22]–[24], аналитические — в [25], [26]. В настоящей работе предлагается схема плоской статически определимой симметричной арочной фермы и выводятся

This publication is licensed under a CC BY-NC 4.0

формулы зависимости ее прогиба и собственной частоты от числа панелей. Целью работы является развитие аналитических методов исследования регулярных стержневых конструкций на арочные фермы с небольшим подъемом.

2 Materials and Methods

2.1 Конструкция фермы и усилия в стержнях

Ферма (рис. 1) имеет 2*n* панелей в пролете и две опорные панели по концам. Общее число стержней в конструкции равно $\eta = 8n + 25$.

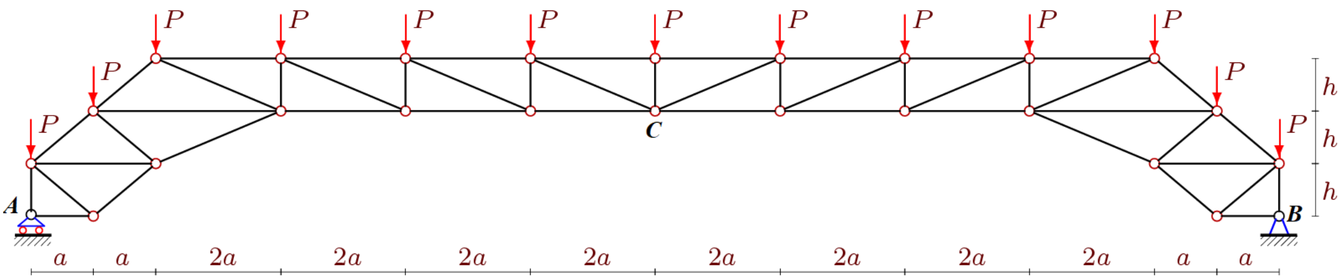


Рис. 1 – Нагрузка верхнего пояса фермы, *n*=3
Fig. 1 – Load of the upper chord of the truss, *n*=3

В это число не входят три опорные стержня, моделирующие левую подвижную и правую неподвижную опоры. Общее число узлов фермы равно $4n+14$, длина пролета конструкции — $L_0 = 4(n+2)a$. Принято, что масса фермы сосредоточена в ее узлах, совершающих вертикальные колебательные движения по оси *y*. Число степеней свободы при таком предположении равно $K = 4n + 14$. Общая высота фермы 3*h*. Раскосы имеют длину $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ и $d = \sqrt{4a^2 + h^2}$. Общее число стержней, включая три стержня, моделирующие опоры, равно $\nu = 8n + 28$. Для определения усилий, необходимых для расчета матрицы жесткости по формуле Максвелла – Мора, используется стандартный метод вырезания узлов статически определенной фермы. Реакции опор входят в число неизвестных и определяются в аналитической форме вместе с усилиями в стержнях. Составляется система уравнений равновесия в проекции на оси координат.

Структура соединений стержней и узлов, а также координаты узлов задаются в программе, написанной на языке символьной математики Maple. Узлы и стержни фермы нумеруются (рис.2). Координаты узлов имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = y_1 = y_2 = 0,\ x_2 = a,\ x_{i+2} = 2ai,\ y_{i+2} = 2h,\ x_{i+2n+9} = 2ia,\\
&y_{i+2n+9} = 3h,\ i = 1...2n+3,\\
&y_3 = y_{2n+5} = h,\ x_{2n+6} = L_0 - a,\ y_{2n+6} = 0,\\
&x_{2n+7} = L_0,\ y_{2n+7} = 0,\ x_{2n+8} = 0,\\
&y_{2n+8} = y_{4n+14} = h,\ x_{2n+9} = a,\\
&y_{2n+9} = y_{4n+13} = 2h,\\
&x_{4n+14} = L_0,\ x_{4n+13} = L_0 - a.
\end{aligned}
$$

Порядок соединения стержней в узлах $i = 1,..,K$ задается списками Φ_i номеров концов стержней его вершин. Стержни нижнего пояса, например, кодируются так:

$$\Phi_i = [i, i+1],\ i = 1,..,2n+6.$$

Стержни верхнего пояса имеют следующие номера концов:

$$\Phi_{i+2n+7} = [i+2n+7, i+2n+8].$$

This publication is licensed under a CC BY-NC 4.0

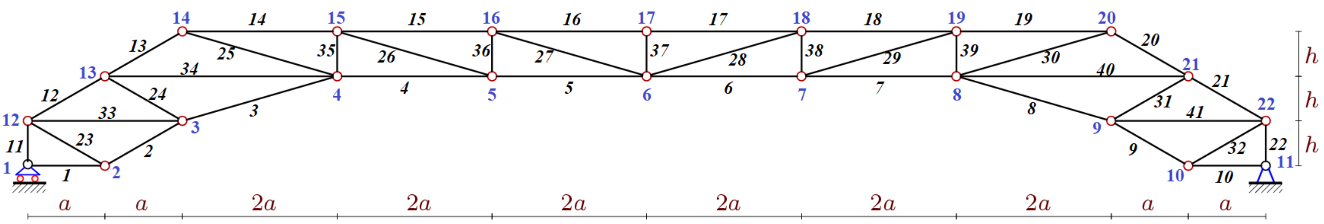


Рис. 2 – Нумерация стержней и узлов, *n*=2
Fig. 2 – Numbering of elements and nodes, *n*=2

Система алгебраических уравнений равновесия записывается и решается в аналитической форме для некоторого определенного числа панелей

$$\mathbf{GS} = \mathbf{R}\,.$$

Введены обозначения: $\mathbf{R}$ — вектор узловых нагрузок длиной K, $\mathbf{G}$ — матрица направляющих косинусов стержней размером $\nu \times \nu$, $\mathbf{S}$ — вектор неизвестных усилий в стержнях. Значения трех реакций опор входят в число неизвестных. Элементы матрицы $\mathbf{G}$ вычисляются по данным о координатах шарниров по концам стержней.

Серия решений, полученных для разного числа панелей, обобщается на произвольное число панелей. Используется система компьютерной математики Maple [27]. На рисунке 3 дано распределение усилий в стержнях фермы при n=2 в случае равномерной нагрузки на все узлы конструкции. Стержни подписаны значениями усилий, отнесенных к узловой нагрузке *P*. Растянутые стержни выделены красным цветом, сжатые — синим. Толщина линий пропорциональна модулям усилий.

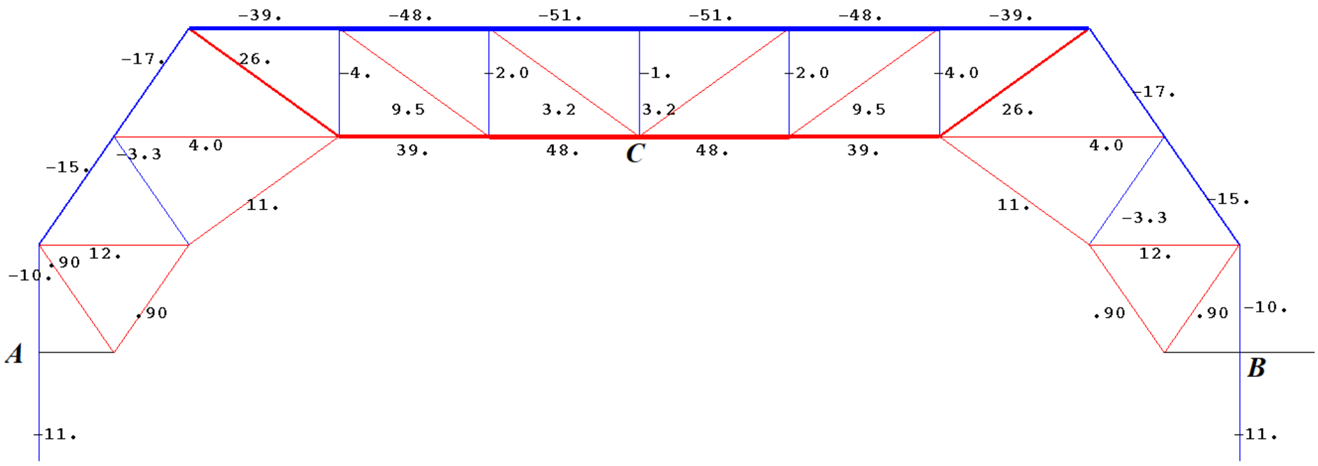


Рис. 3 – Усилия в стержнях в случае вертикальной нагрузки на все узлы фермы, *n*=2
Fig. 3 – Efforts in the rods in case of vertical load on all truss nodes, *n*=2

Наиболее загружены стержни поясов в середине пролета. Значительных сжимающих усилий в решетке нет. Есть по два растянутых стержня по концам пролета с нагрузкой, сопоставимой с усилиями в нижнем поясе.

3 Results and Discussion

3.1 Расчет прогиба

Прогиб фермы рассчитывается по вертикальному смещению среднего узла нижнего пояса (узел с номером *n*+4, рис. 2). Используется формула Максвелла - Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\nu} S_i^{(p)} S_i^{(1)} l_i \,/\, (EF)$$

в предположении, что все стержни имеют одинаковую жесткость *EF*. В формуле приняты обозначения: $S_i^{(1)}$ — усилие в стержне i при действии единичной вертикальной силы на центральный узел с номером *n*+4, $S_i^{(p)}$ — усилия в стержнях фермы от распределенной нагрузки,

This publication is licensed under a CC BY-NC 4.0

l_i — длина стержня. Вертикальные опорные стержни имеют длину *h*, а горизонтальный, соответствующий правой неподвижной опоре, длину *a*.

Расчет прогиба от действия нагрузки на *нижний* пояс для нескольких ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей с использованием операторов системы Maple дает следующие формулы:

$$\Delta_1 = P(538a^3 + 14c^3 + 10d^3 + 15h^3)/(2h^2EF),$$
$$\Delta_2 = P(15702a^3 + 178c^3 + 151d^3 + 198h^3)/(18h^2EF),$$
$$\Delta_3 = P(38370a^3 + 230c^3 + 230d^3 + 279h^3)/(18h^2EF),$$
$$\Delta_4 = P(26442a^3 + 94c^3 + 109d^3 + 126h^3)/(6h^2EF),$$
$$\Delta_5 = P(146490a^3 + 334c^3 + 442d^3 + 495h^3)/(18h^2EF),...$$

Методами компьютерной математики получается обобщение этих формул на произвольное число панелей в половине пролета *n*:

$$\Delta_n = P(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3d^3 + C_4h^3)/(h^2EF), \tag{1}$$

где

$$C_1 = (10n^4 + 80n^3 + 254n^2 + 338n + 125)/3,$$
$$C_2 = (26n + 37)/9,\ C_3 = (9n^2 + 34n + 47)/18,\ C_4 = (n^2 + 4n + 10)/2.$$

Аналогично для случая нагрузки на узлы *верхнего* пояса решение имеет тот же вид (1), но с коэффициентами:

$$C_1 = (10n^4 + 80n^3 + 254n^2 + 338n + 139)/3,$$
$$C_2 = (26n + 53)/9,\ C_3 = (9n^2 + 34n + 37)/18,\ C_4 = (n^2 + 6n + 14)/2.$$

Для нагрузки по верхнему поясу выражения для прогиба имеет линейную асимптотику по числу панелей в предположении фиксированной длины *L* пролета $a = L/(4(n+2))$ и суммарной нагрузки P_{sum} на $2n+7$ узлов фермы $P = P_{sum}/(2n+7)$:

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta_n / n) = \frac{P_{sum}(h^3 + d^3)}{4h^2EF}.$$

Такую же асимптотику имеет решение и в случае нагрузки фермы на нижний пояс.

3.2 Расчет собственной частоты

Приближенное решение для нижней границы первой собственной частоты ω_D свободных колебаний системы с *K* степенями свободы может быть найдено в аналитической форме методом парциальных частот Донкерлея [15]-[17]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^{K} \omega_i^{-2}, \tag{2}$$

где ω_i частота отдельно взятой массы в узле $i = 1,..,K$. Уравнения движения масс имеет вид:

$$m\ddot{y}_i + d_i y_i = 0,\quad i = 1,...,K,$$

где y_i — смещение узла i, d_i — коэффициент жесткости. Парциальная частота вычисляется по формуле:

$$\omega_i = \sqrt{d_i / m}. \tag{3}$$

This publication is licensed under a CC BY-NC 4.0

Жесткость d_i находится по формуле Максвелла – Мора с учетом того, что жесткость — величина обратная податливости δ_i:

$$\delta_i = 1/d_i = \sum_{j=1}^{\eta}\left(\tilde{S}_j^{(i)}\right)^2 l_j/(EF).$$

Из (2) и (3) следует:

$$\omega_D^{-2} = m\sum_{i=1}^{K}\delta_i.. \tag{4}$$

Для систем с многими степенями свободы вычисление в этом выражении суммы в аналитической форме может представлять трудность. Упрощение метода Донкерлея состоит в вычислении суммы по теореме о среднем [16]:

$$\omega_D^{-2} = m\sum_{j=1}^{K}\delta_j = m\delta^{\max}K/2,. \tag{5}$$

где $\delta^{\max}$ — максимальное значение прогиба δ_j по всем узлам. В рассматриваемом случае, очевидно, это средний узел нижнего пояса с номером n+4. Последовательно рассчитывая коэффициент $\delta^{\max}$ для разных чисел панелей, получаем

$$\begin{aligned}
\delta_1^{\max} &= (1254a^3 + 26c^3 + 26d^3 + 27h^3)/(18h^2EF),\\
\delta_2^{\max} &= (3054a^3 + 26c^3 + 35d^3 + 36h^3)/(18h^2EF),\\
\delta_3^{\max} &= (6006a^3 + 26c^3 + 44d^3 + 45h^3)/(18h^2EF),\\
\delta_4^{\max} &= (10398a^3 + 26c^3 + 53d^3 + 54h^3)/(18h^2EF),\\
\delta_5^{\max} &= (16518a^3 + 26c^3 + 62d^3 + 63h^3)/(18h^2EF),....
\end{aligned}$$

Ряд решений, найденных для различных чисел панелей n, методами компьютерной математики Maple обобщается на произвольный случай:

$$\delta^{\max} = (C_1a^3 + C_2c^3 + C_3d^3 + C_4h^3)/(h^2EF). \tag{6}$$

Коэффициенты в этом выражении имеют вид:

$$\begin{aligned}
C_1 &= (8n^3 + 48n^2 + 100n + 53)/3,\\
C_2 &= 13/9,\ C_3 = (9n+17),\ C_4 = (n+2)/2.
\end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, искомая зависимость первой частоты от числа панелей, массы и размеров фермы с учетом (5), (6) и (7) примет вид:

$$\omega_D = h\sqrt{\frac{EF}{(2n+7)m\left(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3d^3 + C_4h^3\right)}}. \tag{8}$$

3.3 Итоги

3.3.1 Сравнение результатов с численным решением

Выведенная зависимость первой частоты от числа панелей (8) можно сравнить с первой частотой, полученной численно в задаче о колебании системы с *K* степенями свободы всех масс в узлах и условно принятой за некоторое точное значение в рамках принятых допущений. Для этого следует воспользоваться стандартным оператором *Eigenvalues* системы Maple из пакета *LinearAlgebra* , предназначенного для вычисления собственные значения матрицы. На рисунке 4 показаны кривые зависимости первой частоты ω_1 спектра, полученной численно и частоты колебаний, рассчитанной аналитически по формуле (8). Модуль упругости стальных стержней

This publication is licensed under a CC BY-NC 4.0

принят равным $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа, массы в узлах $m = 200$ $кг$, размер $a = 3$ $м$, площадь поперечных сечений стержней: $F = 9{,}0$ $см^2$.

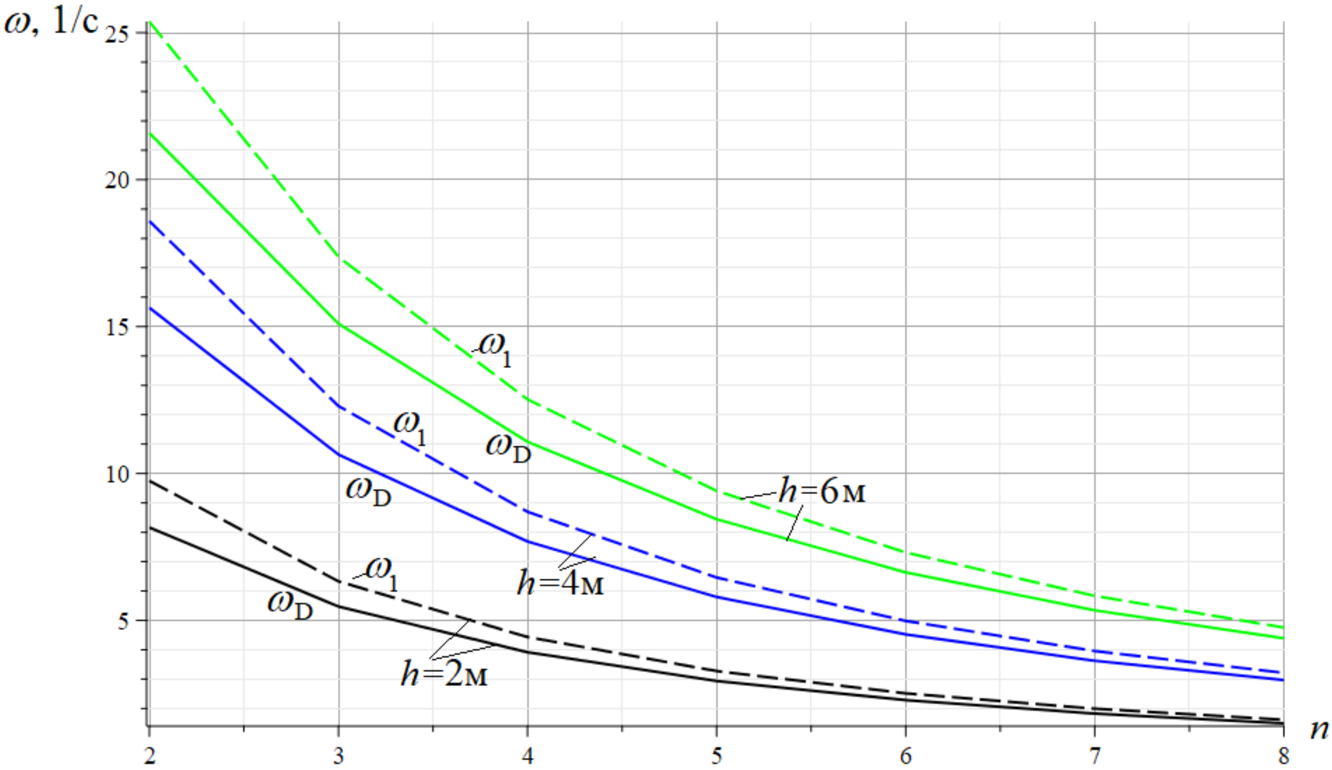
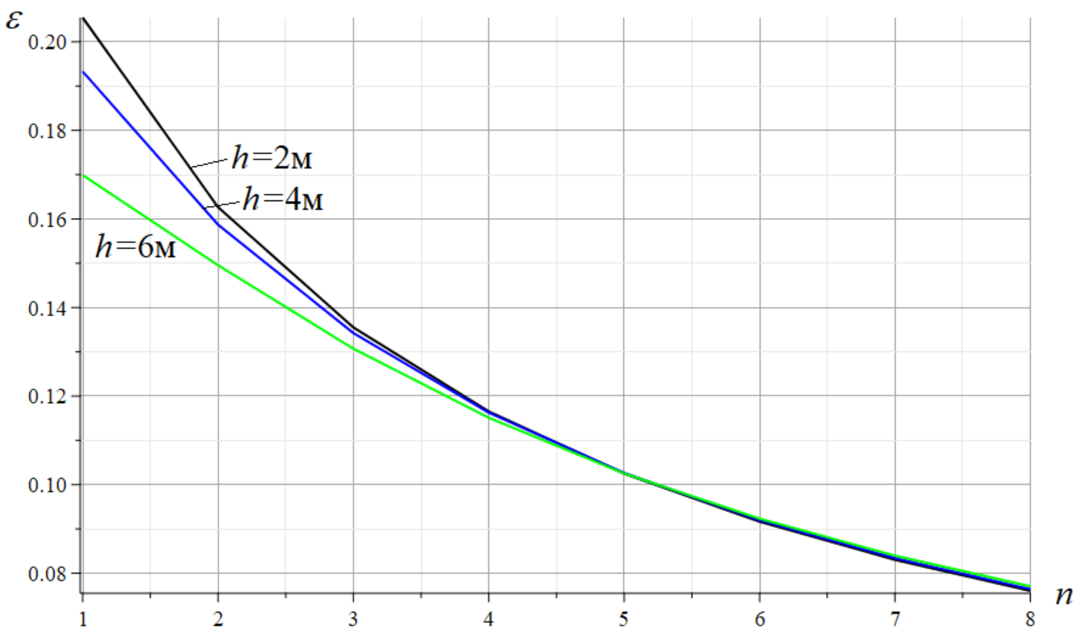


Рис. 4 – Зависимость частоты от количества панелей
Fig. 4 – Frequency dependence on the number of panels

Частота, вычисленная по упрощенному методу Донкерлея ω_D в данной задаче всегда меньше первой частоты ω_1 спектра, вычисленной численно. Можно также оценить и точность приближенного аналитического решения (8), рассчитывая относительную погрешность $\varepsilon = |\omega_1 - \omega_D| / \omega_1$. Оказывается, что с увеличением числа панелей погрешность найденного решения ω_D уменьшаться (рис. 5) при этом начиная с *n*=5 величина погрешности почти не зависит от высоты *h*.



This publication is licensed under a CC BY-NC 4.0

Рис. 5 – Зависимость погрешности аналитической оценки (7) от числа панелей
Fig. 5 – Dependence of the error of the analytical estimate (7) on the number of panels

4 Conclusions

Основными результатами работы являются следующие:

1. Выведены формулы зависимости прогиба фермы и основной частоты колебаний от размеров конструкции, массы, нагрузки и числа панелей.
2. Для решения задачи о прогибе найдена линейная асимптотика по числу панелей.
3. Показано, что приближенный (упрощенный) вариант метода Донкерлея дает более компактный вид результата и хорошую точность.
4. Точность аналитического решения для первой частоты колебаний растет с увеличением числа панелей.

References

1 Wu, Y., Cao, D., Liu, M., Li, Y. and Chen, Z. (2022) Natural Characteristic and Vibration Analysis of Nonlinear Articulated Multi-Beam Ring Structure for Modeling Ring Truss Antenna under Base Excitation. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, **108**, 787–806. https://doi.org/10.1016/J.APM.2022.04.027

2 Embaby, M. and El Naggar, M.H. (2025) Experimental and Analytical Investigation for Modular Double Truss Bridge. *Engineering Structures*, Elsevier, **322**, 119087. https://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2024.119087

3 Komerzan, E. V., Maslov, A.N. (2023) Analytical Evaluation of a Regular Truss Natural Oscillations Fundamental Frequency. *Structural Mechanics and Structures*, **37**, 17–26. https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.002

4 Komerzan, E. V., Maslov, A.N. (2023) Estimation of the L-Shaped Spatial Truss Fundamental Frequency Oscillations. *Structural Mechanics and Structures*, **37**, 35–45. https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.004

5 Kirsanov, M. and Safronov, V. (2022) Analytical Estimation of the First Natural Frequency and Analysis of a Planar Regular Truss Oscillation Spectrum. *Magazine of Civil Engineering*, St. Petersburg Polytechnic University of Peter the Great, **111**. https://doi.org/10.34910/MCE.111.14

6 Kirsanov, M. (2021) Model and Analytical Calculation of a Spatial Truss. *Lecture Notes in Civil Engineering*, Springer Science and Business Media Deutschland GmbH, **150 LNCE**, 496–503. https://doi.org/10.1007/978-3-030-72404-7_48

7 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2005) Microarchitectured Cellular Solids - The Hunt for Statically Determinate Periodic Trusses. *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, **85**, 607–617. https://doi.org/10.1002/zamm.200410208

8 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2006) The Structural Performance of the Periodic Truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Pergamon, **54**, 756–782. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008

9 Kooshkbaghi, M. and Kaveh, A. (2020) Sizing Optimization of Truss Structures with Continuous Variables by Artificial Coronary Circulation System Algorithm. *Iranian Journal of Science and Technology - Transactions of Civil Engineering*, Springer, **44**. https://doi.org/10.1007/s40996-019-00254-2

10 Kaveh, A. (2013) Optimal Analysis of Structures by Concepts of Symmetry and Regularity. *Optimal Analysis of Structures by Concepts of Symmetry and Regularity*, Springer-Verlag Wien, **9783709115**, 1–463. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1565-7

11 Ignatyev, A. V. and Ignatyev, V.A. (2016) On the Efficiency of the Finite Element Method in the Form of the Classical Mixed Method. *Procedia Engineering*, Elsevier Ltd, **150**, 1760–1765. https://doi.org/10.1016/J.PROENG.2016.07.167

12 Galishnikova, V. (2010) Nonlinear Numerical Stability Analysis of Space Trusses. *Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Trusses and Frames*, Sun Media. https://doi.org/10.18820/9781920109998

13 Goloskokov, D.P. and Matrosov, A. V. (2018) Approximate Analytical Approach in Analyzing an Orthotropic Rectangular Plate with a Crack. *Materials Physics and Mechanics*, Institute of Problems of Mechanical Engineering, **36**, 137–141. https://doi.org/10.18720/MPM.3612018_15

This publication is licensed under a CC BY-NC 4.0

14 Goloskokov, D.P. (2014) Analyzing Simply Supported Plates Using Maple System. 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications, ICCTPEA 2014 - Proceedings, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 55–56. https://doi.org/10.1109/ICCTPEA.2014.6893273

15 Kirsanov, M.N. (2023) Deformations of a Three-Dimensional Model of a Trihedral Double Lattice Rod Tower. *Vestnik MGSU. Monthly Journal on Construction and Architecture*, **18**, 1032–1038. https://doi.org/10.22227/1997-0935.2023.7.1032-1038

16 Kirsanov, M.N. and Luong, C.L. (2024) Simplified Method for Estimating the First Natural Frequency of a Symmetric Arch Truss. *Magazine of Civil Engineering.*, **17**, 13001. https://doi.org/10.34910/MCE.130.1

17 Kirsanov, M.N. (2024) Formulas for Calculating Deformations and Natural Frequency of Free Vibrations of a Hexagonal Tower. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*, **1**, 101–109. https://doi.org/10.36622/VSTU.2024.61.1.009

18 Luong, C.L. (2024) Resonance Safety Zones of a Truss Structure with an Arbitrary Number of Panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **114**, 11304–11304. https://doi.org/10.4123/CUBS.113.4

19. Maslov A.N. (2023) The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **4(110)**, 10912–10912. https://doi.org/10.4123/CUBS.109.12

20. Vorobev O.V. (2020) Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **7(92)**, 9204–9204. https://unistroy.spbstu.ru/article/2020.93.4/

21. Petrenko V.F. (2021) The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*, **20**, 2001. https://alfabuild.spbstu.ru/article/2021.20.1/

22 Degertekin, S.O., Yalcin Bayar, G. and Lamberti, L. (2021) Parameter Free Jaya Algorithm for Truss Sizing-Layout Optimization under Natural Frequency Constraints. *Computers and Structures*, Elsevier Ltd, **245**, 106461. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2020.106461

23 Tyukalov, Y. (2020) Optimal Shape of Arch Concrete Block Bridge. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **93**, 9307. https://doi.org/10.18720/CUBS.93.7

24 Marutyan, A., Abovyan, A. and Kravchenko, A. (2023) Optimization of the Assembly of Cross-Truss Structures. *E3S Web of Conferences*, EDP Sciences, **410**. https://doi.org/10.1051/E3SCONF/202341004003

25 Tinkov, D. V. and Safonov, A.A. (2017) Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, Allerton Press Incorporation, **46**, 46–52. https://doi.org/10.3103/S1052618817010149

26 Tinkov, D. V. (2016) The Optimum Geometry of the Flat Diagonal Truss Taking into Account the Linear Creep. *Magazine of Civil Engineering*, St-Petersburg State Polytechnical University, **61**, 25–32. https://doi.org/10.5862/MCE.61.3

27 Zotos K. (2007) Performance comparison of Maple and Mathematica. *Applied Mathematics and Computation*, **2(188)**, 1426–1429. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.008