



Research Article


Received: January 5, 2024


Accepted: February 14, 2024

Published: March 10, 2024

ISSN 2658-5553

# The first frequency and frequency safety area of a cantilever truss with an arbitrary number of panels

Luong, Cong Luan<sup>1</sup> 

Kirsanov, Mikhail Nikolaevich<sup>1\*</sup> 

<sup>1</sup> Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation; [luongcongluan96@gmail.com](mailto:luongcongluan96@gmail.com) (L.C.L.); [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru) (K.M.N.)

Correspondence: \*email [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru); contact phone +7(965)183-35-34

## Keywords:

Truss; First natural frequency; Dunkerley method; Maple; Analytical solution; Frequency safety area

## Abstract:

**The object of research** is a planar model of a statically determinate truss system. **Method.** The rigidity and first natural frequency of oscillations of the truss are analyzed analytically. If the truss rods have the same cross-section, and the mass of the truss is evenly distributed among its nodes, then each mass has one degree of freedom, and the stiffness of the rods is the same. Using induction, analytical expressions for the deflection are found. The formula for the dependence of the main (first) natural frequency of oscillations of the truss on the number of panels is derived by the Dunkerley method. Based on the results of calculating deflections in a series of similar trusses with different numbers of panels, the expected dependence of deflections on the load, elastic properties of the rods and the number of panels was obtained. The solution of the system of linear equations that determine the force in the rods and any transformations are performed in the Maple computer mathematics package. Using the Maxwell-Mohr formula, the stiffness matrix of the structure can be determined. **Results.** The first natural frequency of the truss obtained by the analytical method is compared with the results of the numerical method. The frequency spectrum of the truss was analyzed, and conclusions were drawn about the dependence on the size of the panels. In the combined frequency spectrum of a family of regular trusses, a region of unattainable frequencies is identified.

## 1 Introduction

Расчет частот собственных колебаний является одной из основных задач динамики конструкций. Первая, самая низкая частота имеет особое значение при строительстве, монтаже и эксплуатации фермы. Расчет строительных конструкций на прочность и деформацию на практике как правило осуществляется методом конечных элементов. В [1] теория математических моделей и алгоритмов рассматривается с использованием метода конечных элементов как классический метод строительной механики. Эффективность этого метода продемонстрирована в [2]. Альтернативой численным методам являются методы аналитические. Особенно эффективны эти методы для регулярных систем, для которых возможно получение решений в зависимости от порядка регулярности конструкции (например, числа панелей). В [3] решена задача о нижней границе первой частоты собственных колебаний в зависимости от числа панелей. Статические деформации регулярной пространственной составной фермы рассчитаны в аналитической форме в [4]. В [5] решена задача о деформациях внешне статически неопределимой фермы. Решение задачи о прогибе регулярной ферме пространственного покрытия треугольной формы получено в [6]. Формула для прогиба плоской фермы со сложной решеткой выведена методом индукции в [7]. В данной работе объектом исследования является

Luong, C. L.; Kirsanov, M.

The first frequency and frequency safety area of a cantilever truss with an arbitrary number of panels; 2024; AlfaBuild; 31 Article No 3104. doi: 10.57728/ALF.31.4

новая плоская модель статически определенной консольной фермы. Цель работы – вывести в аналитическом виде формулу для определения первой частоты фермы. Впервые ставится задача об определении зависимости размеров области частот, при которых невозможны явления резонанса на всех частотах от геометрии фермы. В [8] обсуждается аналитическая зависимость прогибов различных регулярных статически определенных ферм, арок, панелей и рам от числа панелей при нескольких видах нагрузок. Простой вывод приближенного значения первой частоты фермы получен с помощью метода Донкерлея в [9], [10]. Преимущества этого метода поясняются в [11], [12]. В [13], [14] показано, что метод Донкерлея подходит для ферм с большим количеством панелей. Метод Донкерлея удобен тем, что в отличие от метода Рэлея [15], он проще и не требует прогнозирования формы колебаний. Общие вопросы существования решений для статически определенных стержневых регулярных структур изучали Hutchinson R.G. и Fleck N.A. [16], [17]. Решение, оценивающее собственные частоты в аналитическом виде с использованием системы Maple получено в [18]. Нелинейные параметрические колебания пластин переменной толщины изучены в [19].

Индукционный метод, использованный в данной работе, позволяет существенно расширить область применения аналитического решения и определить зависимость прогибов и частот колебаний от порядка регулярной структуры. Такие решения используются для предварительных расчетов проектируемых конструкций, где оптимальный вариант можно выбрать путем подбора порядка регулярной системы (числа панелей). Аналитические методы особенно эффективны применительно к конструкциям с большим числом элементов, где в процессе численных расчетов неизбежна потеря точности из-за ошибок округления.

Задача определения зависимости размера области частот, безопасных в смысле возникновения резонанса, недостаточно изучена [12], [13]. В лучшем случае получены семейства спектров [22] и выделены в них безопасные области. Однако для более точной оценки динамики конструкции и ее оптимизации необходима зависимость величины безопасной области от размеров конструкции. Именно эта задача, помимо поиска аналитических решений, является одной из задач, решаемых в настоящей статье численно.

## 2 Materials and Methods

### 2.1 Конструкция фермы и расчет усилий

Рассматриваемая ферма представляет собой статически определенную плоскую Г-образную ферму, содержащую  $n$  панелей в ригеле (рис. 1). Ферма крепится к вертикальной стене подвижными шарнирами и имеет неподвижный шарнир на нижней опоре. Длина фермы  $L = a(n + 2)$ . Вся масса фермы условно распределена по  $N = 2n + 9$  узлам конструкции, за исключением двух опорных узлов. Ферма содержит  $V = 4n + 13$  стержней. В это число также входят три стержня, моделирующие опоры.

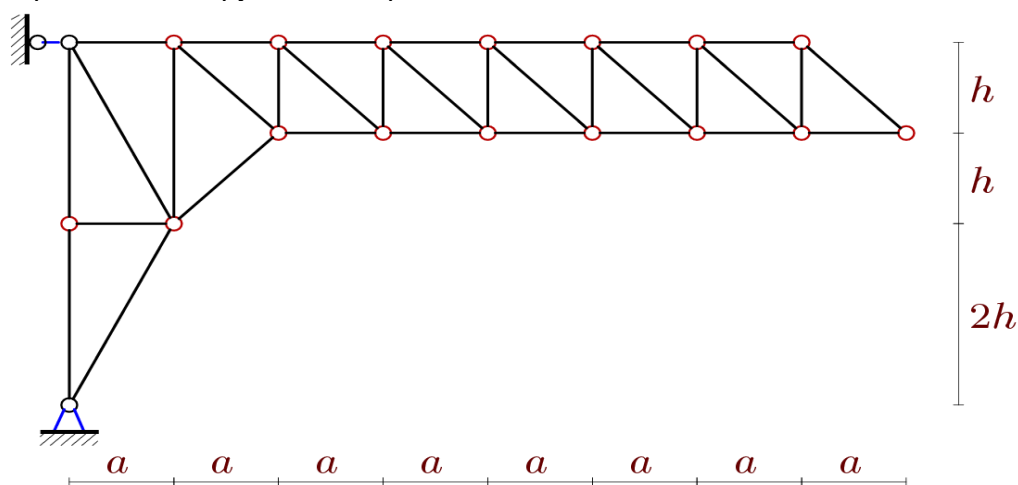


Рис. 1 - Ферма,  $n=6$   
Fig. 1 - Truss,  $n=6$

Расчет усилий в стержнях статически определимой конструкции выполняется методом вырезания узлов. Координаты узлов и структура соединения стержней в ферме определяются в программе на языке Maple. На рисунке 2 показана нумерация стержней и узлов фермы на примере фермы с четырьмя панелями в ригеле. Порядок соединения стержней в узлах определяется аналогично определению структуры графа в дискретной математике.

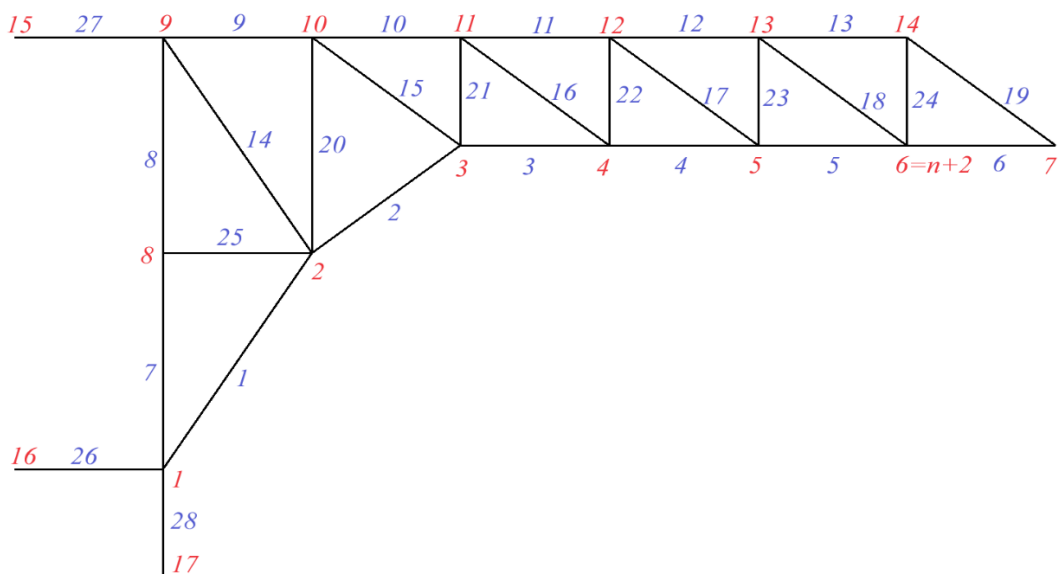


Рис. 2 - Нумерация стержней и узлов,  $n=4$ . Опоры моделируются стержнями  
Fig. 2 - Numbering of rods and nodes,  $n=4$ . Supports are modeled by bars

Силы в стержнях фермы, содержащиеся в формуле Максвелла - Мора, находятся из решения системы узловых уравнений равновесия узлов, записанной в матричной форме. Правые части — нагрузки на ферму. Матрица системы состоит из направляющих косинусов усилий в стержнях, вычисляемые по данным о координатах узлов и порядке соединения стержней в узлах. Одновременно с усилиями рассчитываются и реакции опор.

Распределение усилий в стержнях фермы порядка  $n = 4$  под действием распределенной по верхнему поясу нагрузки показано на рисунке 3. Принятые размеры фермы:  $a = 3\text{ м}$ ,  $h = 1\text{ м}$ . Толщина отрезков стержней на рисунке условно пропорциональна модулям сил в этих стержнях. Сжатые стержни обозначены синим цветом, растянутые элементы — красным. Ненагруженные стержни обозначены тонкими черными линиями. Практически весь верхний пояс растянут, а нижний под этой нагрузкой сжат. Стержни сильнее всего растягиваются и сжимаются в основании консоли.

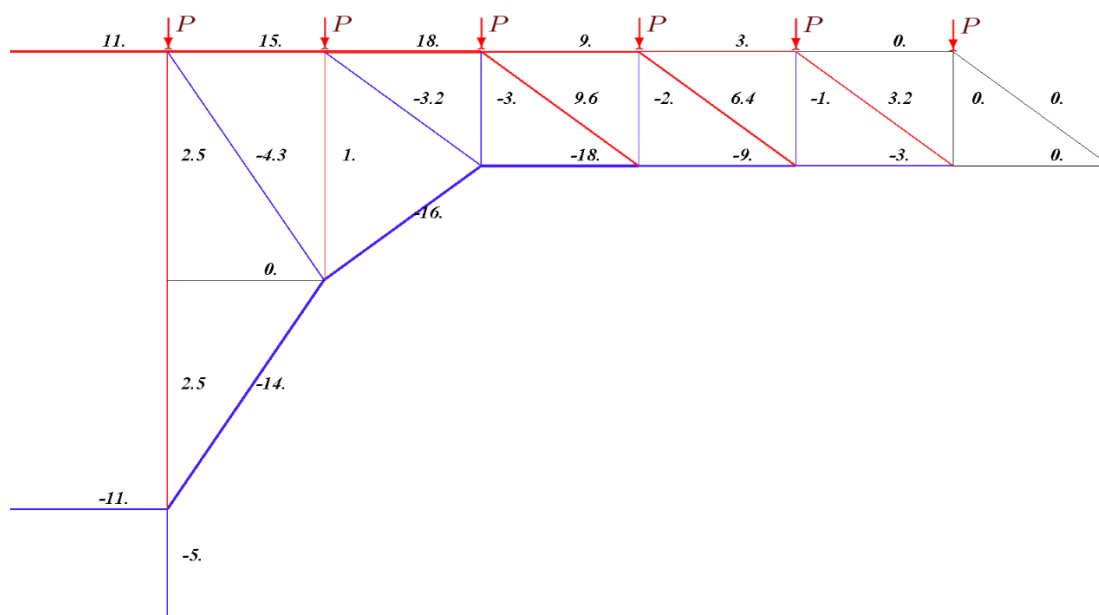


Рис. 3 - Распределение усилий, нагрузка по верхнему поясу  $n=4$   
 Fig. 3 - Distribution of forces, load on the upper belt  $n=4$

## 2.2 Метод Донкерлея

Нижняя оценка частоты первого колебания по формуле Донкерлея выражается следующим образом [3]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}, \quad (1)$$

где  $\omega_p$  — парциальные частоты, рассчитанные для каждой массы отдельно,  $K = 2n + 6$  — число степеней свободы системы грузов в узлах фермы.

Для расчета парциальных частот составляются уравнения движения масс  $M$ , размещенных в узлах:

$$M\ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (2)$$

Коэффициент жесткости  $D_p$ , обратный к коэффициенту податливости, вычисляется по формуле Максвелла - Мора:

$$\delta_p = 1 / D_p = \sum_{\alpha=1}^v (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF). \quad (3)$$

Фактически в такой постановке вычисляются только диагональные элементы матрицы жесткости. Из формулы Донкерлея при  $y_p = A_p \sin(\omega t + \varphi)$  следует:  $\omega_p = \sqrt{D_p / M}$ . Отсюда получается приближенное выражение для частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = M \sum_{p=1}^K \delta_p = M \Delta_n. \quad (4)$$

Расчет серии ферм с разным числом панелей  $n$  показал, что коэффициент  $\Delta_n$  имеет вид, не зависящий от параметра  $n$ :

$$\begin{aligned} n = 1 : \Delta_1 &= \frac{47a^3 + 24c^3 + 11d^3 + 176h^3}{8EFh^2}, \\ n = 2 : \Delta_2 &= \frac{97a^3 + 38c^3 + 13d^3 + 134h^3}{4EFh^2}, \\ n = 3 : \Delta_3 &= \frac{589a^3 + 176c^3 + 53d^3 + 456h^3}{8EFh^2}, \\ n = 4 : \Delta_4 &= \frac{359a^3 + 85c^3 + 24d^3 + 197h^3}{2EFh^2}, \\ n = 5 : \Delta_5 &= \frac{3003a^3 + 584c^3 + 159d^3 + 1312h^3}{8EFh^2}, \\ n = 6 : \Delta_6 &= \frac{2811a^3 + 462c^3 + 123d^3 + 1038h^3}{4EFh^2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

С помощью операторов системы Maple вычисляются общие члены полученной последовательности коэффициентов при степенях размеров фермы:  $a^3$ ,  $c^3$ ,  $d^3$ ,  $h^3$ . Здесь обозначены длины раскосов:  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $d = \sqrt{a^2 + 4h^2}$ . Из формулы (4) следует, что зависимость прогиба от числа панелей и размеров конструкции имеет вид:

$$\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3) / (h^2 EF). \quad (5)$$

Коэффициенты в этом выражении получаются из решения рекуррентных уравнений в системе Maple:

$$\begin{aligned} C_1 &= (8n^4 + 22n^3 + 40n^2 + 47n + 24) / 24, \\ C_2 &= (n+1)(2n^2 + 4n + 3) / 6, \\ C_3 &= (2n^3 + 6n^2 + 13n + 12) / 24, \\ C_4 &= (2n^3 + 9n + 33) / 2. \end{aligned} \quad (6)$$

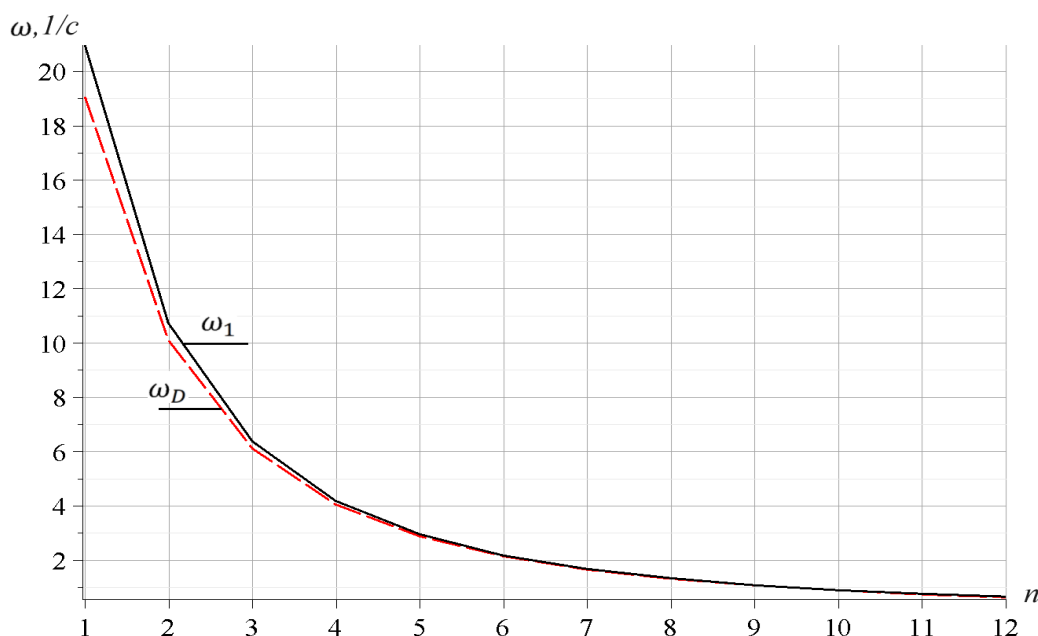
Таким образом, формула для расчета первой частоты колебаний фермы будет иметь вид:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{M(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3)}}. \quad (7)$$

### 3 Results and Discussion

#### 3.1 Численное решение

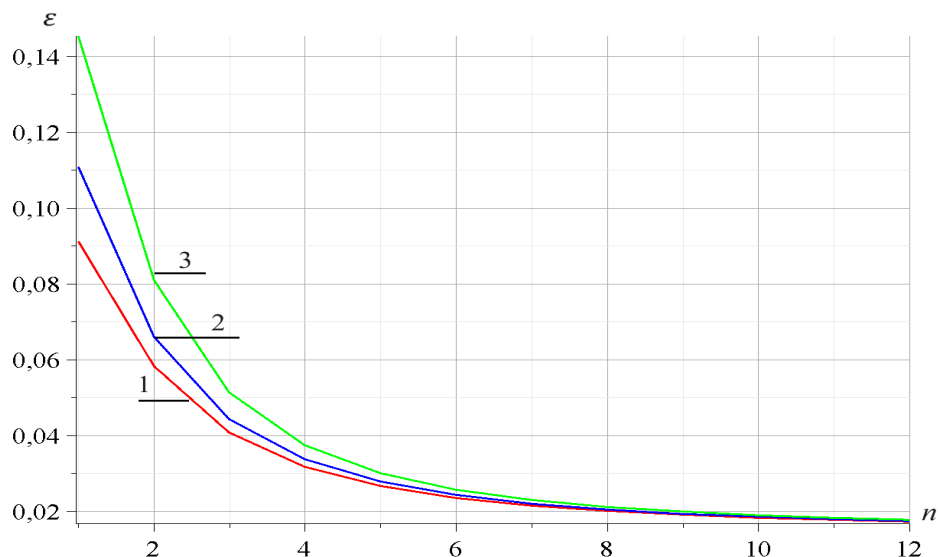
Для оценки погрешности формулы Донкерлея можно использовать численное решение для первой частоты, которая находится из всего спектра собственных частот колебаний фермы. Предположим, что размер рассматриваемой фермы следующий:  $a = 3\text{м}$ ,  $h = 0.5\text{м}$ . Площади поперечного сечения стержней решетки и опорных стержней равны:  $F = 1\text{см}^2$ . Модуль упругости стали  $E = 2.1 \cdot 10^5$  МПа, масса в узлах  $M = 150\text{кг}$ .



**Рис. 4 - Сравнение аналитического решения с численным**  
**Fig. 4 - Comparison of the analytical solution with the numerical method**

На рисунке 4 представлены зависимость от количества панелей нижней оценки наименьшей частоты  $\omega_D$  по формуле Донкерлея (7) и значения первой частоты  $\omega_1$  спектра системы с  $K$  степенями свободы, найденная численно. Из графика на рисунке 4 видно, что результаты, полученные методом Донкерлея и численным методом, почти совпадают. Первое свойство,

которое можно выделить, заключается в том, что с увеличением числа панелей первая собственная частота монотонно уменьшается. В начале графика при небольшом числе панелей собственная частота очень быстро уменьшается по мере увеличения числа панелей. Погрешность аналитической оценки, как правило, невелика и уменьшается с увеличением числа панелей в ферме. Отсюда можно сделать вывод, что аналитическое решение, полученное методом Донкерлея, наиболее всего подходит для решения задач ферм с большим количеством панелей. Для уточнения расчетного значения полученного приближенного значения можно ввести значение относительной ошибки  $\varepsilon_D = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$ . На рисунке 5 показана погрешность метода Донкерлея для нескольких различных значений высоты фермы  $h$ .



**Рис. 5 - Относительная погрешность оценки частоты колебаний по Донкерлею, 1 –  $h = 0.5 м$ ; 2 –  $h = 1 м$ ; 3 –  $h = 1.5 м$**

**Fig. 5 - Relative error in estimating the oscillation frequency according to Dunkerley, 1 –  $h = 0.5 м$ ; 2 –  $h = 1 м$ ; 3 –  $h = 1.5 м$**

Погрешность метода Донкерлея при рассматриваемых размерах не превышает 14.5%. В частности, по мере постепенного увеличения порядка фермы погрешность резко снижается и достигает вполне допустимого значения ошибки 2% при  $n > 10$ .

### 3.2 Спектры собственных частот регулярных ферм

Обычно в инженерных расчетах высшие частоты колебаний не используются, за исключением некоторых исследований резонансных случаев. При работе различного оборудования (станков, вентиляторов и др.), установленного на ферме, собственная частота вибрации оборудования может совпадать с собственной частотой конструкции. Аналитические методы не могут дать решения для этих частот. На графике (рис. 6) точками отмечены спектры нескольких регулярных ферм, отличающихся только порядком. Отдельные точки, принадлежащие одной ферме, соединены условными ломаными. С помощью использованного при нахождении первой частоты математического аппарата в режиме численного расчета на графике представлена картина распределения частот ферм различного порядка. Это позволяет выявить некоторые свойства распределения спектральных множеств.

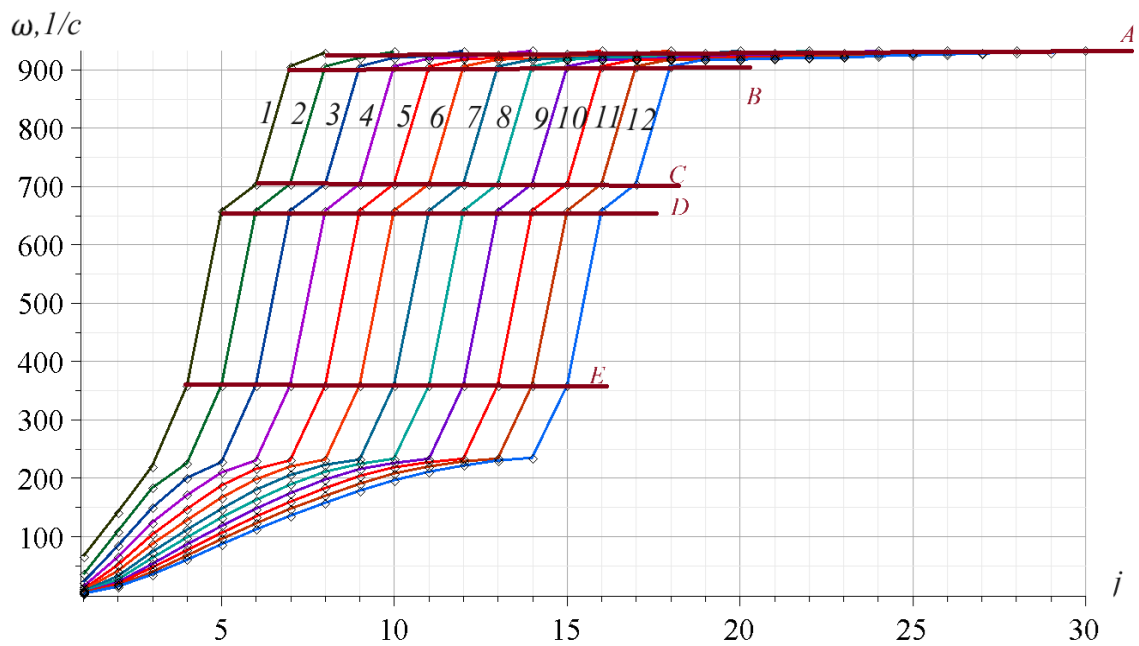
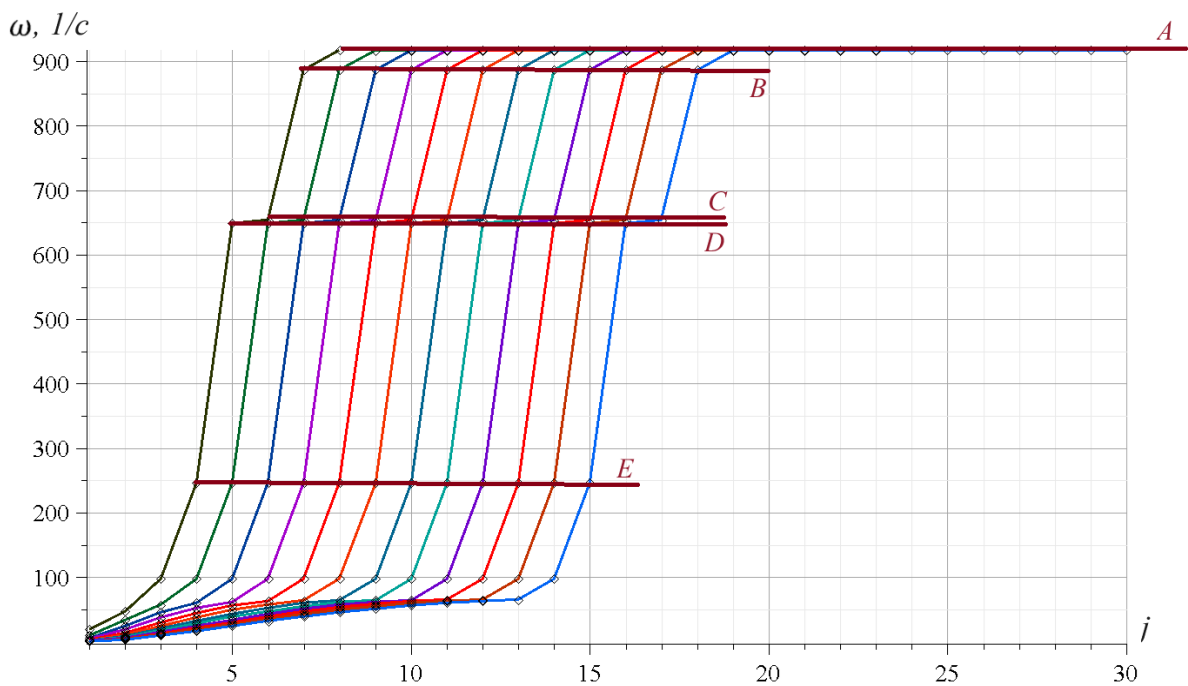


Рис. 6 - Спектры регулярных ферм  $a = 2м$

Fig. 6 - Spectra of regular trusses  $a = 2м$

Показаны собственные частоты колебаний двенадцати отдельных ферм порядка  $n = 1, \dots, 12$ . Каждая кривая соответствует ферме заданного порядка, координаты точек на ней являются частотами. По оси абсцисс показаны номера собственных частот в упорядоченных спектрах. Например, спектр простейшей фермы при  $n = 1$  содержит  $K = 2n + 6 = 8$  частот, спектр фермы порядка  $n = 12$  состоит из 30 частот.

Замечены некоторые свойства частотного распределения. Во-первых, все спектры характеризуются значительными скачками частоты. Независимо от порядка ферм частота  $n + 3$  всегда находится в области ниже значения  $250 c^{-1}$ . Приняты размеры фермы  $a = 2м$ ,  $h = 1м$ ,  $F = 1см^2$ . Наиболее четко видны пять горизонтальных отрезков, соединяющих точки, изображающие значения собственных частот. Это спектральные константы, обозначенные как А, В, С, D и E. Верхний предел частот А принадлежат всем спектрам фермы. Наличие этих констант позволяет прогнозировать некоторые частоты фермы большого порядка регулярности по данным расчета фермы с произвольным числом панелей. Для ферм размером  $a = 5м$  собственные частоты показаны на рисунке 7.

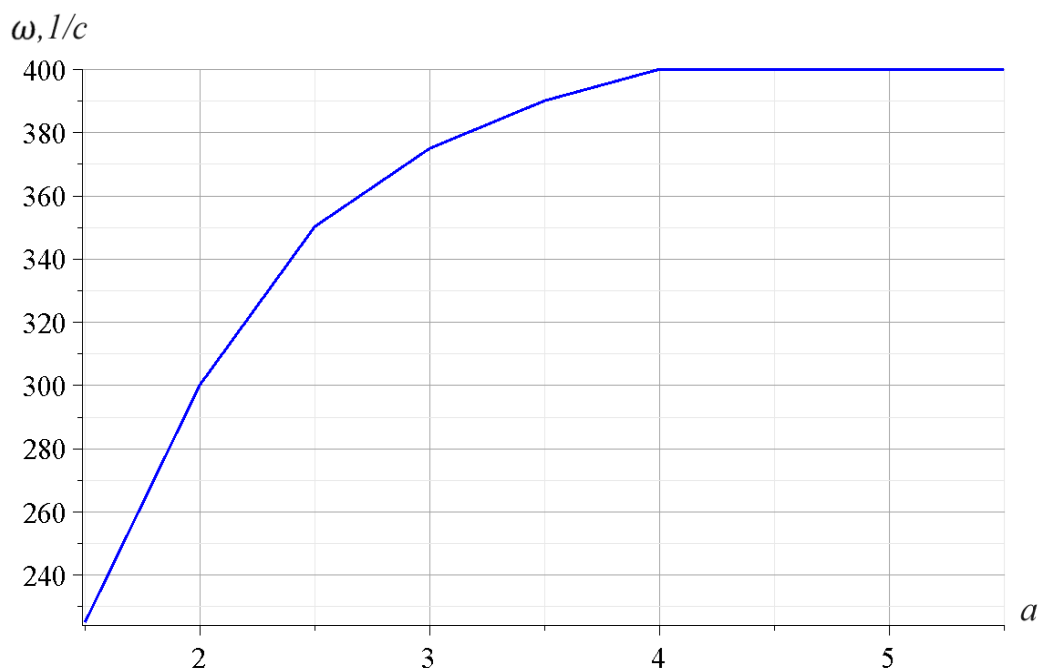


**Рис. 7 - Спектры регулярных ферм  $a = 5\text{ м}$**

**Fig. 7 - Spectra of regular trusses  $a = 5\text{ м}$**

На рисунках 6 и 7 видно, что распределение частотного спектра разделено на четко выраженные области. Первая область с  $n+3$  частотами всегда ниже значения  $300\text{ с}^{-1}$ . Вторая область с 2 константами всегда ниже значения  $700\text{ с}^{-1}$ , а третья область с  $n+1$  частотами также содержит две спектральные константы в диапазоне значений выше  $800\text{ с}^{-1}$ .

На рис. 8 показана зависимость безопасного диапазона частоты от размера  $a$ . Горизонтальная ось представляет значение  $a(\text{м})$ , вертикальная ось — значение частоты между константами  $D$  и  $E$ . Замечено, что для больших значений длины отдельной панели размер безопасного диапазона частот почти не зависит от величины  $a$ .



**Рис. 8 - Зависимость безопасного диапазона частоты от  $a$**

**Fig. 8 - Dependence of the safe frequency range on  $a$**

Luong, C. L.; Kirsanov, M.

The first frequency and frequency safety area of a cantilever truss with an arbitrary number of panels; 2024; AlfaBuild; 31 Article No 3104. doi: 10.57728/ALF.31.4



## 4 Conclusions

Предложена статически определенная ферма плоской консольной фермы Г-образной формы. Разработана математическая модель конструкции для расчета собственной частоты колебаний в аналитическом виде для произвольного количества панелей. Нижняя оценка частоты собственных колебаний была получена с помощью метода Донкерлея. Полученные формулы сравниваются с численным решением. Аналитическое решение применимо к фермам с большим количеством панелей. В этом случае в процессе расчета не накапливаются погрешности, как при численном методе. Спектральные константы наблюдаются в частотных спектрах ферм разных порядков.

Можно сделать следующие выводы:

1. Оценка наименьшей частоты, полученная по формуле Донкерлея для произвольного числа панелей, компактна и обеспечивает высокую точность.
2. В рассматриваемой балочной ферме погрешность аналитического решения уменьшается с увеличением числа панелей, приближаясь к 2%.
3. Область частот, свободная от эффекта резонанса, слабо зависит от размера панели, начиная с некоторого его значения.

## References

1. Ignatyev, A. V. and Ignatyev, V.A. (2016) On the Efficiency of the Finite Element Method in the Form of the Classical Mixed Method. *Procedia Engineering*, Elsevier Ltd, 150, 1760–1765. <https://doi.org/10.1016/J.PROENG.2016.07.167>.
2. Ignatiev, V.A., Ignatiev, A.V. (2022) Finite Element Method in the Form of a Classical Mixed Method of Structural Mechanics (Theory, Mathematical Models and Algorithms). Publishing House ASV, Moscow. <https://iasv.ru>.
3. Kirsanov M.N., Luong Cong Luan (2022) Deflection and the lower limit of the fundamental frequency of natural vibrations of a beam truss. *Structural mechanics and structures*, 35, 24-33. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.35.4.003>
4. Komerzan E. V., Sviridenko O. V. (2022) Static deformations of the truss of a composite spatial frame. Analytical solutions. *Structural mechanics and structures*, 35, 40-48. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.35.4.005>
5. Komerzan E.V., Sviridenko O. V. Analytical calculation of the deflection of a plane external statically undetermined truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and Structures*, 2021. 2(29).29-30. <https://cchgeu.ru/science/nauchnye-izdaniya/stroitelnyaya-mekhanika-i-konstruktsii/spisok-vypuskov/29.pdf>
6. Kirsanov M.N. (2023) Formulas for calculating the deflection of a triangular truss of spatial cover. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*, 59, 97-106. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.3.59.009>
7. Kirsanov M. (2022) Formulas for calculating the deflection and displacement of a planar truss support with short studs in a lattice; *Construction of Unique Buildings and Structures*, 104, 10403. <https://doi.org/10.4123/CUBS.104.03>
8. Kirsanov M. (2020) *Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, GB. <https://cambridgescholars.com/product/978-1-5275-5976-9>
9. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. (2017) The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels. *Science Almanac*, 28, 268–271. <https://doi.org/10.17117/na.2017.02.03.268>.
10. Kirsanov M., Luong C.L. (2022) Deformations and natural frequency spectrum of a planar truss with an arbitrary number of panels. *AlfaBuild*, 25, 2507. <https://doi.org/10.57728/ALF.25.7>
11. Low K.H. (2000) A Modified Dunkerley Formula for Eigenfrequencies of Beams Carrying Concentrated Masses. *International Journal of Mechanical Sciences*, 42, 1287–1305. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00049-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00049-1)
12. Kirsanov M.N., Luong Cong Luan (2023) Analytical solution to the problem of the dependence of the first vibration frequency of a frame-type truss on the number of panels. *Structural mechanics and structures*, 38, 108-116. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.38.3.010>
13. Sviridenko O., Komerzan E. (2022) The dependence of the natural oscillation frequency of the

Luong, C. L.; Kirsanov, M.

The first frequency and frequency safety area of a cantilever truss with an arbitrary number of panels; 2024; *AlfaBuild*; 31 Article No 3104. doi: 10.57728/ALF.31.4

- console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*, 101, 10101. <https://doi.org/10.4123/CUBS.101.1>
14. Petrichenko E.A. (2020) Lower limit of the natural vibration frequency of the Fink truss. *Builds. mechanics and structures*, 26, 21–29. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.4.510-517>
  15. Vorobev O. (2020) Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*, 92, 9204. <https://doi.org/10.18720/CUBS.92.4>
  16. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. (2005.) Microarchitected cellular solids - The hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 85, 607–617. <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>
  17. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. (2006) The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54, 756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>
  18. Kirsanov, M. (2022) Model of a Spatial Dome Cover. *Deformations and Oscillation Frequency. Construction of Unique Buildings and Structures*, 99, 9904. <https://doi.org/10.4123/CUBS.99.4>
  19. Mirsaidov, M.M., Abdikarimov, R.A., Vatin, N.I., Zhgutov, V.M., Khodzhaev, D.A. and Normuminov, B.A. (2018) Nonlinear Parametric Oscillations of Viscoelastic Plate of Variable Thickness. *Magazine of Civil Engineering, St-Petersburg State Polytechnical University*, 82, 112–126. <https://doi.org/10.18720/MCE.82.11.22.14>
  20. Enrique Luco, J. (2013) Bounds for Natural Frequencies, Dunkerley's Formula and Application to Soil-Structure Interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 47, 32–37. <https://doi.org/10.1016/J.SOILDYN.2012.08.007>
  21. Dai, Qiao. (2021) Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. *AlfaBuild*, 17. <https://doi.org/10.34910/ALF.17.1>
  22. Luong, C.L., Kirsanov, M. (2024) Effect of truss height on the safe frequency region of a statically determined flat truss, *Construction of Unique Buildings and Structures*, 110 Article No 11003. <https://doi.org/10.4123/CUBS.110.3>
  23. Han, Q.H., Xu, Y., Lu, Y., Xu, J. and Zhao, Q.H. (2015) Failure Mechanism of Steel Arch Trusses: Shaking Table Testing and FEM Analysis. *Engineering Structures*, Elsevier Ltd, 82, 186–198. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.10.013>
  24. Levy, C. (1991) An Iterative Technique Based on the Dunkerley Method for Determining the Natural Frequencies of Vibrating Systems. *Journal of Sound and Vibration*, Academic Press, 150, 111–118. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90405-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90405-9)
  25. Liu, M., Cao, D. and Zhu, D. (2021) Coupled Vibration Analysis for Equivalent Dynamic Model of the Space Antenna Truss. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier Inc., 89, 285–298. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.07.013>
  26. Trainor, P.G.S., Shah, A.H. and Popplewell, N. (1986) Estimating the Fundamental Natural Frequency of Towers by Dunkerley's Method. *Journal of Sound and Vibration*, Academic Press, 109, 285–292. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(86\)80009-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(86)80009-8)
  27. Patricia Vanova, Zhen Sun, Odin-Eliott Odinson, Zhiyu Jiang. (2023) Dynamic response analysis of a model truss bridge considering damage scenarios. *Engineering Failure Analysis*, 151, 107389. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2023.107389>