



Research Article



Received: September 27, 2023

Accepted: October 6, 2023

Published: November 4, 2023

ISSN 2658-5553

The formula for the fundamental oscillation frequency of a planar spacer truss

Sviridenko, Olesya Vyacheslavovna ^{1*} 
Komerzan, Evgeny Vladislavovich ¹ 

¹ Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation; SviridenkoOV@mpei.ru (S.O.V.); KomerzanYV@mpei.ru (K.E.V.)

Correspondence:* email SviridenkoOV@mpei.ru; contact phone [+79057175101](tel:+79057175101)

Keywords:

Estimation of natural oscillations; Frequency of natural oscillations; Diamond-shaped flat truss; Induction; Dunkerley method; Maxwell-Mohr formula; Maple

Abstract:

The object of research is an externally statically indeterminate spacer-type truss, which has a flat structure with a diamond-shaped lattice. Both supporting hinges of the truss are motionless. The support rods are assumed to be rigid. In analytical form, the dependence of the first natural frequency of oscillations of the truss on its size, mass, and number of panels is found. **Method.** The stiffness of a truss with masses concentrated at the nodes is determined by the Maxwell-Mohr formula under the assumption that the stiffnesses of all rods are the same. An analytical estimate of the first frequency was calculated using the Dunkerley formula. A generalization of a series of solutions for farms with a successively increasing number of panels was carried out by the induction method. The common terms of the sequence of coefficients are found from the solution of linear homogeneous recurrent equations. All transformations, including calculation of forces in rods and reactions of supports, were performed in the Maple computer mathematics system. **Results.** The dependence of the natural frequency on the number of farm panels was found in numerical form. A comparison of the analytical solution with the numerical one showed that the accuracy of the analytical estimate from below increases with the number of truss panels.

1 Introduction / Введение

В настоящей работе предлагается математическая модель внешне статически неопределимой плоской ферменной конструкции с ромбовидной решёткой. Опоры фермы представлены двумя неподвижными шарнирами и предполагаются жесткими. Это означает, что данная ферма распорная. Для такого типа ферм были выполнены только деформационные расчеты [1]. Для предложенной на рисунке 1 модели фермы аналитические расчеты собственных частот колебаний для произвольного числа панелей, массы и размеров конструкции не выполнялись. Подобные ферменные конструкции нашли широкое применение в строительстве.

В [2] с использованием анализа конечных элементов рассчитаны и оптимизированы фермы Пратта. Выполнено прогнозирование оптимальной топологии для различных поперечных сечений. Корреляция между длиной пролета, площадью поперечного сечения и высотой ферм рассчитана для нахождения идеальной топологии фермы Пратта, которая обеспечивает минимальные напряжения сжатия и растяжения.

В основном фермы используют для перекрытия больших пролётов с целью уменьшения расхода применяемых материалов и облегчения конструкций. Также фермы иногда применяют в качестве элементов конструкций опор линий электропередач [3], для крепления антенн, уличных и дорожных указателей [4]. Расчет собственных частот колебаний ферменных конструкций

Sviridenko, O.; Komerzan, E.

The formula for the fundamental oscillation frequency of a planar spacer truss; 2023; *AlfaBuild*; 29 Article No 2908. doi: 10.57728/ALF.29.8



является актуальной задачей наряду с оценкой их жесткости и прочности. Как правило, расчёты выполняют в численном виде с использованием специализированных пакетов, реализующих метод конечных элементов.

В [5] с целью исследования механизма передачи напряжения от стальной фермы к бетонным элементам в гибридных стальных ферменно-бетонных балках разработана трехмерная нелинейная модель конечных элементов. Определяющие взаимоотношения стали, из которой состоят пластины, и арматурных стержней моделируются с помощью кусочно линейного закона, а поведение бетона определяется с помощью модели поврежденной пластичности бетона, подходящей для моделирования бетона и хрупких материалов.

Простая математическая модель для оценки периодов вибрации и форм колебаний обычных консольных изгибов, используемых в бетонных конструкциях, таких как сдвиговые стены, сдвоенные стены, жесткие каркасы и стеново-каркасные конструкции предложена в [6]. Изгиб рассматривается как континуум, и предлагаемая модель основана на методе разложения изгиба консоли на две взаимодополняющие подсистемы (изгиб стены и ее арматурного каркаса). Для расчета собственных частот используется формула Донкерлея.

В [7] представлено новое выражение для нижней оценки основной собственной частоты конструкции и исследована его связь с формулой Донкерлея. Оценка получена и применена для нахождения приближенного выражения основной частоты системы грунт-конструкция.

Первое применение адаптивного обобщенного метода конечных элементов для анализа свободной продольной вибрации и ферм представлено в [8]. Обобщенный метод конечных элементов разработан путем расширения стандартного пространства метода конечных элементов, в основе которого лежит разбиение на элементы, информацией о решаемом дифференциальном уравнении. Используемые функции зависят от геометрических и механических свойств элемента. Предложенный подход сходится быстро и способен аппроксимировать частоту, связанную с любой модой вибрации.

В случае, когда для построения используется простая математическая модель статически определимой фермы, возможно и аналитическое решение [9]. В [10] получено аналитическое решение для основной частоты пространственной стержневой пирамиды. Среди существующих моделей ферм можно выделить регулярные сооружения, для которых применим метод индукции [11]. С помощью данного метода получают зависимость собственных частот от количества панелей или стержней [12], [13]. Такие подходы используют для оценки численных решений и для предварительных расчетов проектируемых моделей, в том случае, когда можно подобрать оптимальный вариант с помощью выбора порядка регулярной системы [14], [15]. Аналитические решения для плоских регулярных ферм с произвольным числом панелей методом индукции получены в [16], [17]. Для пространственных ферм с произвольным числом панелей аналитические решения найдены в [18], [19]. В справочниках [1,20] собраны различные схемы плоских моделей статически определимых ферм, арок и рам приведены формулы для расчета их прогибов. В [21] методом индукции решена задача о статическом прогибе плоской фермы с произвольным числом панелей. Основная частота собственных колебаний плоской фермы с двумя пролетами в аналитической форме получена в [22].

Цель работы — вывод формулы зависимости основной частоты собственных колебаний распорной внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей. Рассмотрена новая схема плоской фермы с подъемом в средней части пролета. Результаты исследования фермы могут быть использованы для контроля численных решений. Это является актуальным для крупномасштабных конструкций с большим числом элементов, и для предварительных расчетов проектируемых сооружений.

2 Materials and Methods / Материалы и методы

Модель фермы представляет собой плоскую конструкцию с ромбовидной решеткой, которая имеет в своём основании две неподвижные опоры по краям (рис. 1). Число панелей равно n , каждая панель имеет длину $2a$. Длина пролета фермы $L_0 = 2a(2n + 1)$. Общая высота конструкции $3h$. Ферма содержит $4n + 10$ шарниров. Общее количество стержней в конструкции, включая четыре стержня, моделирующие опоры, составляет $q = 8n + 12$.

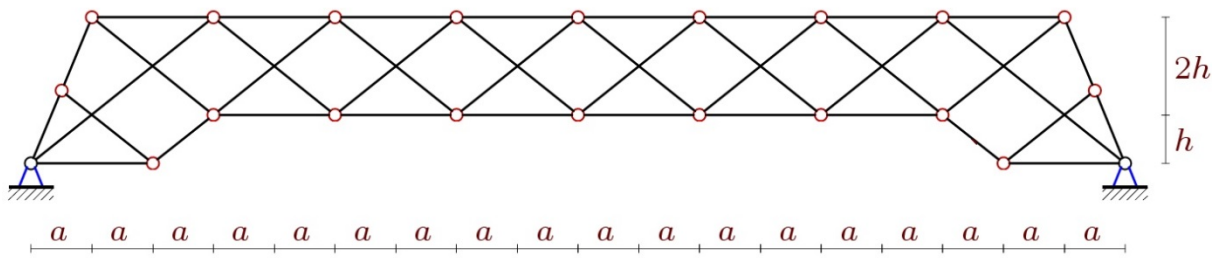


Рис. 1 – Модель плоской фермы с ромбовидной решеткой, $n=4$
 Fig. 1 – The model of the flat truss with the diamond-shaped lattice, $n=4$

Масса фермы равномерно распределена по узлам нижнего пояса, за исключением опор. Стержни предполагаются упругими и невесомыми. Шарниры, соединяющие стержни, идеальные.

Задача заключается в получении аналитической оценки зависимости нижней частоты собственных колебаний фермы от числа панелей. Решение выполнено в предположении, что массы в узлах колеблются вдоль оси y . Число степеней свободы рассматриваемой модели ферменной конструкции равно $K=4n+6$. Жесткость конструкции определена по формуле Максвелла – Мора в предположении упругих деформаций стержней фермы. Полагается, что четыре стержня, которые моделируют опоры, являются жесткими. Усилия в узлах фермы и реакции опор найдены из общей системы уравнений равновесия в проекциях на оси координат. Матрица системы уравнений равновесия включает направляющие косинусы усилий в стержнях, значения которых получены на основе данных о координатах узлов и структуре соединений стержней.

Выполнена нумерация концевых узлов стержней для ввода данных о порядке их соединения в узлах конструкции (рис. 2).

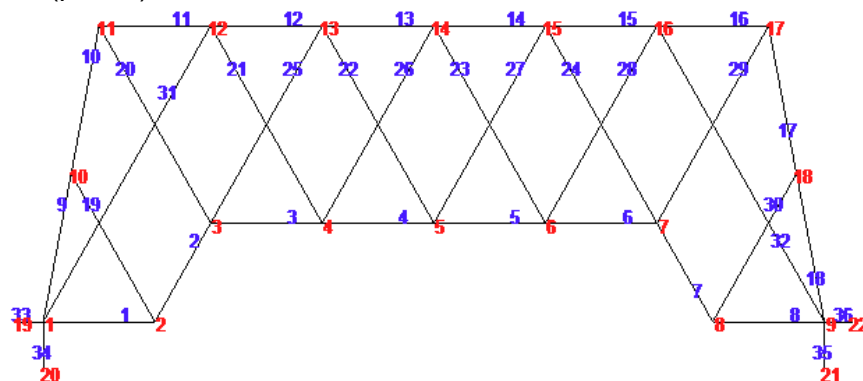


Рис. 2 – Структура соединения стержней, нумерация узлов и стержней, $n=3$
 Fig. 2 – The structure of the connection of rods, numbering of nodes and rods, $n=3$

В правую часть системы уравнений равновесия вносятся значения внешних сил. В задаче колебаний это единичные силы, направленные вдоль оси y . Решение системы уравнений, позволило получить аналитические выражения для сил, используемых при определении жесткости конструкции. Для обобщения ряда частных решений использован метод индукции, реализованный в системе компьютерной математики Maple [23].

Система дифференциальных уравнений колебаний точечных масс в узлах фермы представлена в матричном виде:

$$m\mathbf{I}_K \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{D}_K \mathbf{Y} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_K]^T$ – смещения масс в узлах фермы вдоль оси y ; $\ddot{\mathbf{Y}}$ – вектор ускорений; \mathbf{I}_K – единичная матрица; \mathbf{D}_K – матрица жесткости.

В случае гармонических колебаний с частотой ω справедлива связь $\ddot{\mathbf{Y}} = -\omega^2 \mathbf{Y}$. Матрица \mathbf{D}_K является обратной к матрице податливости \mathbf{B}_K . Элементы этой матрицы вычисляются с помощью формулы Максвелла – Мора:



$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{q-4} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF), \quad (2)$$

где $b_{i,j}$ – перемещение узла i от действия единичной безразмерной силы, приложенной к узлу j ; $S_{\alpha}^{(i)}$ – усилие в стержне с номером α от действия единичной силы, действующей на узел i , где расположена масса m по направлению движения массы; l_{α} – длина стержня α ; EF – жесткость стержней.

Чтобы найти усилия в стержнях, использован программный пакет символьных вычислений Maple, в котором реализуется метод вырезания узлов и решение совместной системы уравнений равновесия всех узлов фермы. Умножив равенство (1) на матрицу \mathbf{B}_K , сводим задачу к стандартной задаче о собственных значениях матрицы \mathbf{B}_K : $\mathbf{B}_K \mathbf{Y} = \lambda \mathbf{Y}$, где $\lambda = 1/(\omega^2 m)$ – собственное значение матрицы \mathbf{B}_K , ω – собственная частота колебаний. Приближенное аналитическое решение для нижней оценки ω_D первой частоты ω_1 можно получить по формуле Донкерлея:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}, \quad (3)$$

где ω_p — парциальная частота.

3 Results and Discussion / Результаты и обсуждение

Для расчета парциальных частот составляем уравнение вертикальных колебаний массы m , расположенной в отдельном узле: $m\ddot{y}_p + D_p y_p = 0$, где y_p – вертикальное смещение массы, \ddot{y}_p – вектор ускорения, D_p – коэффициент жесткости ($p = 1, 2, \dots, K$ – номер массы).

Коэффициент жесткости D_p , обратный коэффициенту податливости, определяется по формуле Максвелла – Мора: $\delta_p = 1/D_p = \sum_{\alpha=1}^{q-4} (\tilde{S}_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF)$, где $\tilde{S}_{\alpha}^{(p)}$ – усилие в стержне α от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу, где расположена масса с номером p . Фактически в такой постановке вычисляются только диагональные элементы матрицы \mathbf{B}_K .

Из формулы Донкерлея (3), при $y_p = A_p \sin(\omega t + \varphi)$ следует, что парциальная частота $\omega_p = \sqrt{D_p / m}$. С учетом (3) имеем:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_n. \quad (4)$$

Расчет серии ферм с разным числом панелей показал, что коэффициент Δ_n имеет вид, не зависящий от параметра n :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (75398a^3 + 41319c^3 + 899d^3 + 12156h^3) / (1200h^2 EF), \\ \Delta_2 &= (1307042a^3 + 453177c^3 + 6991d^3 + 91188h^3) / (7056h^2 EF), \\ \Delta_3 &= (601618a^3 + 136773c^3 + 1621d^3 + 20308h^3) / (1296h^2 EF), \\ \Delta_4 &= (5895622a^3 + 921339c^3 + 8817d^3 + 106812h^3) / (5808h^2 EF), \\ \Delta_5 &= (3720122a^3 + 418617c^3 + 3349d^3 + 39492h^3) / (1872h^2 EF). \end{aligned}$$

Свойство сохранения формы решения имеет место для регулярных конструкций. Общая форма решения имеет вид:

Sviridenko, O.; Komerzan, E.

The formula for the fundamental oscillation frequency of a planar spacer truss; 2023; *AlfaBuild*; 29 Article No 2908. doi: 10.57728/ALF.29.8

$$\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3) / (h^2 EF(2n+1)^2). \quad (5)$$

Формулы для общих членов полученных последовательностей коэффициентов находятся с помощью компьютерной математической системы Maple, позволяющей определить рекуррентные уравнения, которым они удовлетворяют. Уравнения получаются однородными, линейными. Решение рекуррентных уравнений дало формулы для коэффициентов. Общие члены последовательностей коэффициентов при a^3, c^3, d^3, h^3 имеют вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= (2048n^6 + 1024n^5 + 8960n^4 + 23760n^3 + 18012n^2 + 236n - 4315) / 360, \\ C_2 &= (384n^4 + 304n^3 + 1064n^2 + 524n - 107) / 16, \\ C_3 &= (160n^3 + 212n^2 + 194n + 181) / 144, \\ C_4 &= (128n^3 + 384n^2 + 208n + 63) / 12. \end{aligned} \quad (6)$$

Погрешность нижнего приближения решения (4–6) оценивается из сравнения с численным решением задачи о колебании системы с числом степеней свободы N . Найдены собственные значения матрицы \mathbf{B}_N . Для этого использован оператор собственных значений Eigenvalues из пакета LinearAlgebra системы Maple. На графике, рисунок 3, показано сравнение численного решения зависимости первой частоты ω_1 спектра от числа панелей и оценки Донкерлея ω_D по формуле (5) с коэффициентами (6). В решении использованы следующие константы: модуль упругости стали $E = 2,1 \cdot 10^5$, площадь поперечного сечения стержней $F = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$, $m = 150 \text{ кг}$, размеры конструкции $a = 2 \text{ м}$, $b = 3 \text{ м}$ и $h = 2 \text{ м}$.

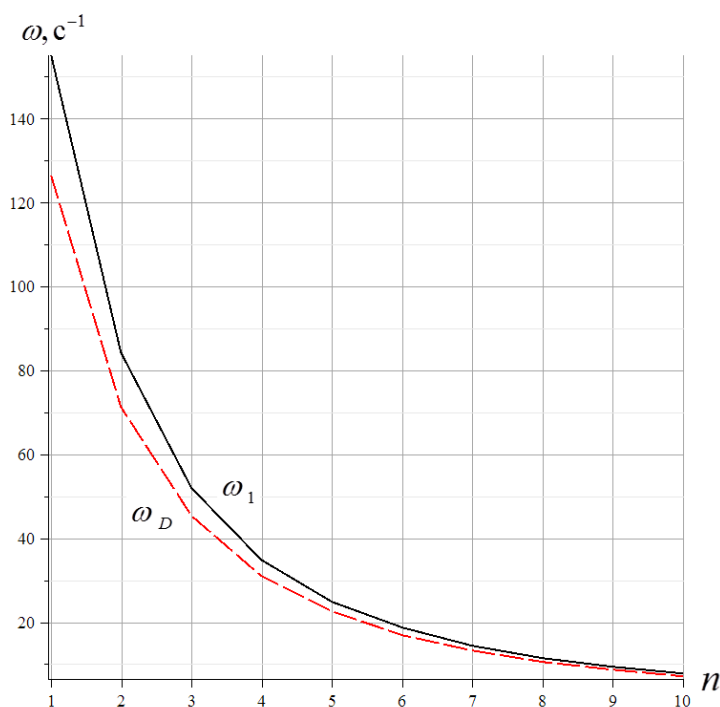


Рис. 3 – Сравнение аналитической оценки и численного решения задачи о минимальной частоте: численное решение ω_1 ; решение по формуле (5) для ω_D

Fig. 3 – Comparison of the analytical estimate and the numerical solution of the minimum frequency problem; numerical solution ω_1 ; solution (5) for ω_D

Решение по Донкерлею, как и ожидалось, ниже первой частоты спектра, полученной численно. Из полученных графиков видно, что по мере увеличения количества панелей точность оценки Донкерлея монотонно растет. Это отображено на рисунке 4 из соотношения относительных погрешностей $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$. Для плоских балочных ферм метод Донкерлея дает заметно большую точность.

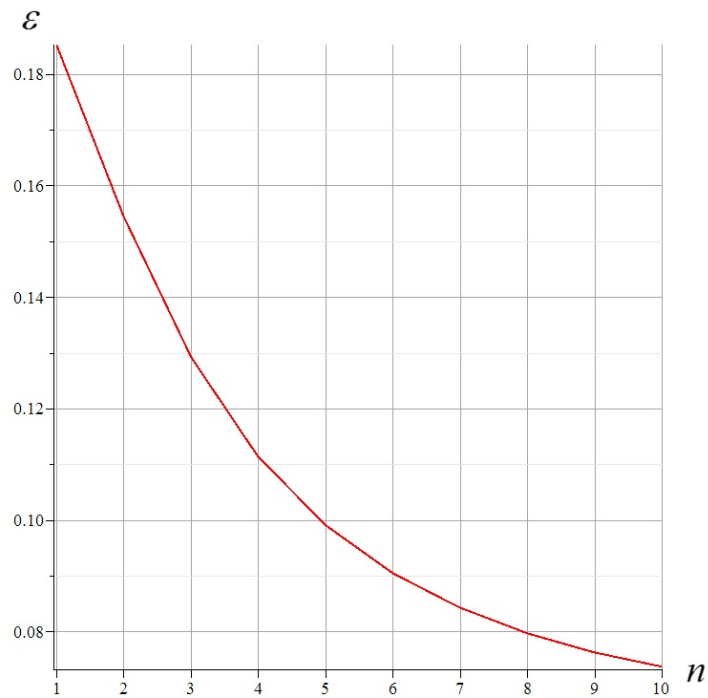


Рис. 4 – Погрешность оценки Донкерлея в зависимости от числа панелей (5)
Fig. 4 – Relative error of the formula (5)

На рисунке 5 показано изменение частоты колебаний при $n = 2$ в зависимости от длины панели a при разных высотах. С увеличением a для небольших высот частота резко уменьшается, для больших высот ($h > 1$) эта зависимость становится более ровной, а кривизна кривой меняет знак.

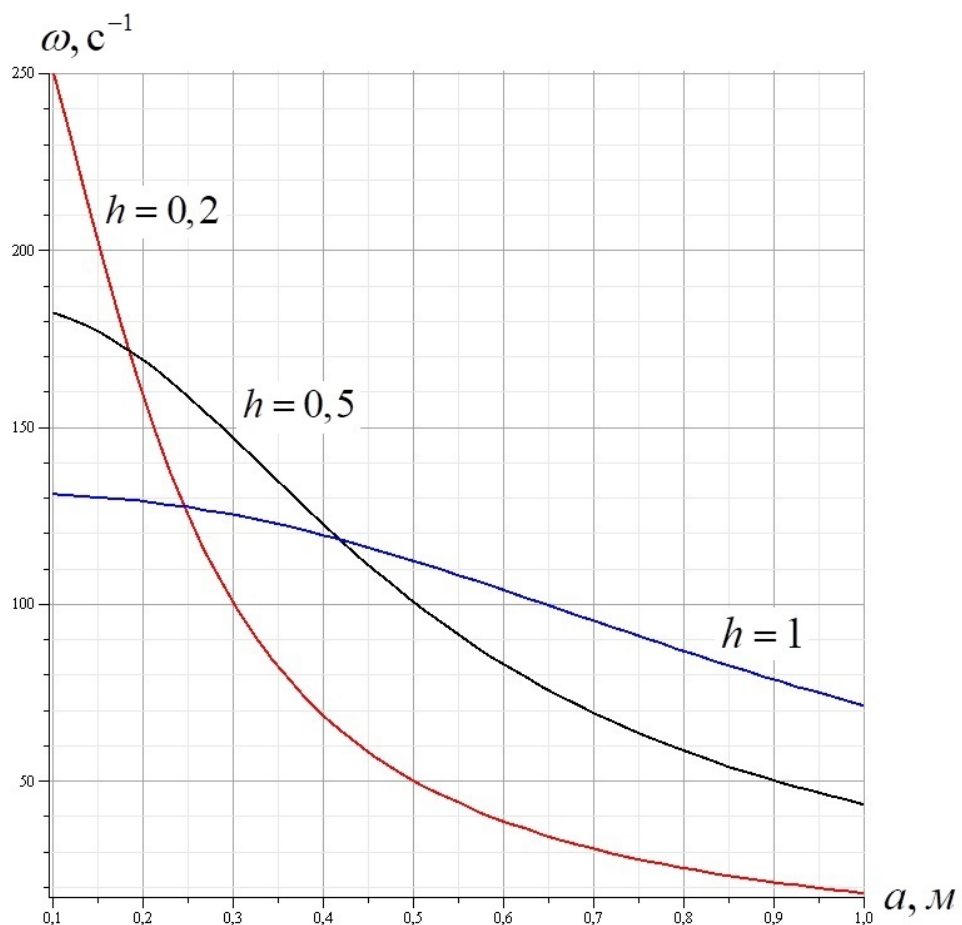




Рис. 5 – Зависимость первой частоты от размера a фермы
Fig. 5 – Dependence of the first frequency on the size a of the truss

4 Conclusions / Выводы

1. Получена аналитическая зависимость первой частоты собственных колебаний плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей в предположении, что смещения масс в узлах происходят только по вертикали. Формула может быть использована как для предварительной оценки проектируемой конструкции, так и для оценки точности численных методов расчета. Показана эффективность полученной зависимости для расчета ферм с большим числом панелей, т.е. именно там, где точность численных методов падает, трудоемкость растет, а предлагаемая формула имеет наименьшую погрешность. Метод применим и для любых других регулярных механических систем с многими степенями свободы.

2. В решение в качестве параметров входят массы грузов, размеры конструкции, модуль упругости материала и число панелей.

3. Найденное решение несложно по форме и может быть использовано в качестве проверки для оценки численных расчетов реальных конструкций, что особенно эффективно для ферм с большим числом панелей.

4. Рассчитана и представлена зависимость изменения первой частоты колебаний от размеров конструкции, сделано заключение о том, что с увеличением длин и высот панелей частота уменьшается.

5. Для предложенной конструкции плоской статически неопределимой фермы, выполнено сравнение результатов аналитической оценки и численных результатов, что подтвердило предположение о том, что с увеличением числа панелей точность аналитического решения растет.

6. В ходе обработки результатов расчетов представлена зависимость погрешности от числа панелей, что свидетельствует о хорошей точности расчетов методом Донкерлея причем при увеличении числа панелей точность растет.

5 Findings / Финансирование

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 22-21-00473.

References

- 1 Kirsanov, M. (2020) Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, GB. <https://cambridgescholars.com/product/978-1-5275-5976-9>.
- 2 Abdelhamid, Y., Farahat, H., Othman, M.N., Mater, Y.M. and Ahmed, A.M. (2023) Finite Element Optimization of Pratt Trusses Using Trial and Error. *Materials Today: Proceedings*, Elsevier. <https://doi.org/10.1016/J.MATPR.2023.08.128>.
- 3 Kirsanov, M. and Maslov, A. (2021) Estimation of the Natural Vibration Frequency of a Triangular Mast. *AlfaBuild*, **17**. <https://doi.org/10.34910/ALF.17.4>.
- 4 Kirsanov, M.N. (2019) Calculation of G-Shaped Farming of Road Signs and Equipment. *Russian journal of building construction and architecture*, **2**, 62–71. <https://doi.org/10.25987/VSTU.2019.42.2.007>.
- 5 Colajanni, P., La Mendola, L., Latour, M., Monaco, A. and Rizzano, G. (2015) FEM Analysis of Push-out Test Response of Hybrid Steel Trussed Concrete Beams (HSTCBs). *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, **111**, 88–102. <https://doi.org/10.1016/J.JCSR.2015.04.011>.
- 6 Georgoussis, G.K. (2006) A Simple Model for Assessing Periods of Vibration and Modal Response Quantities in Symmetrical Buildings. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, John Wiley & Sons, Ltd, **15**, 139–151. <https://doi.org/10.1002/TAL.286>.
- 7 Enrique Luco, J. (2013) Bounds for Natural Frequencies, Dunkerley's Formula and Application to Soil-Structure Interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **47**, 32–37. <https://doi.org/10.1016/J.SOILDYN.2012.08.007>.
- 8 Arndt, M. and Machado, R. (2010) An Adaptive Generalized Finite Element Method Applied to

Sviridenko, O.; Komerzan, E.

The formula for the fundamental oscillation frequency of a planar spacer truss; 2023; *AlfaBuild*; **29** Article No 2908. doi: 10.57728/ALF.29.8



- Free Vibration Analysis of Straight Bars and Trusses. *Journal of Sound and Vibration*, **329**, 659–672. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.09.036>.
- 9 Komerzan, E. V., Maslov, A.N. (2023) Estimation of the L-Shaped Spatial Truss Fundamental Frequency Oscillations. *Structural Mechanics and Structures*, **37**, 35–45. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.004>.
- 10 Kirsanov, M.N., Luong, C. (2023) Frequency Spectrum of Natural Oscillations of the Spatial Structure of the Rod Pyramid. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **107**, 10702. <https://doi.org/10.4123/CUBS.107.2>.
- 11 Manukalo, A.S. (2023) Analysis of a Planar Sprengel Truss First Frequency Natural Oscillations Value. *Structural Mechanics and Structures*, **37**, 54–60. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.006>.
- 12 Kirsanov, M. and Ivanitskii, A. (2023) Bilateral Analytical Estimation of the Natural Oscillation Frequency of a Planar Triangular Truss. *AlfaBuild*, **26**, 2601. <https://doi.org/10.57728/ALF.26.1>.
- 13 Petrichenko, E.A. (2020) Lower Bound of the Natural Oscillation Frequency of the Fink Truss. *Structural Mechanics and Structures*, **26**, 21–29. https://www.elibrary.ru/download/elibrary_44110287_71394021.pdf.
- 14 Kaveh, A. and Zolghadr, A. (2018, October 1) Meta-Heuristic Methods for Optimization of Truss Structures with Vibration Frequency Constraints. *Acta Mechanica*, Springer-Verlag Wien, 3971–3992. <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2234-z>.
- 15 Kaveh, A., Hosseini, S.M. and Zaerreza, A. (2020) Size, Layout, and Topology Optimization of Skeletal Structures Using Plasma Generation Optimization. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering 2020 45:2*, Springer, **45**, 513–543. <https://doi.org/10.1007/S40996-020-00527-1>.
- 16 Shchigol, E.D. (2023) The Formula for the Lower Estimate of the Natural Oscillations of a Flat Regular Girder Truss with a Rectilinear Upper Belt. *Structural Mechanics and Structures*, **37**, 46–53. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.005>.
- 17 Ivanitskii, A.D. (2022) Formulas for Calculating Deformations of a Planar Frame. *Structural mechanics and structures*, Voronezh State Technical University, **34**, 90–98. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.34.3.007>.
- 18 Kirsanov, M.N. (2021) Spectrum of Own Frequencies of a Spatial Surfacing Girder. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*, Voronezh State Technical University, 104–113. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2021.51.3.009>.
- 19 Kirsanov, M. (2022) Model of a Spatial Dome Cover. Deformations and Oscillation Frequency. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **99**. <https://doi.org/10.4123/CUBS.99.4>.
- 20 Kirsanov, M. (2019) Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, GB. <https://www.cambridgescholars.com/product/978-1-5275-3531-2>.
- 21 Dai, Q. (2021) Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. *AlfaBuild*, **17**, 1701. <https://doi.org/10.34910/ALF.17.1>.
- 22 Petrenko, V.F. (2021) The Natural Frequency of a Two-Span Truss. *AlfaBuild*, 2001. <https://doi.org/10.34910/ALF.20.1>.
- 23 Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N. and Serdjuks, D.O. (2020) Calculation of Deformations of a Cantilever-Frame Planar Truss Model with an Arbitrary Number of Panels. *Vestnik MGSU*, **4**, 510–517. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.4.510-517>.