



Research Article

Received: June 21, 2023

Accepted: July 18, 2023

Published: July 25, 2023

ISSN 2658-5553

# Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss

Kirsanov, Mikhail Nikolaevich<sup>1</sup> Saypulaev, Gasan Ruslanovich<sup>1</sup> Saypulaev, Musa Ruslanovich<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation; [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru) (K.M.N.); [saypulaevgr@mail.ru](mailto:saypulaevgr@mail.ru) (S.G.R.); [saypulaevmr@mail.ru](mailto:saypulaevmr@mail.ru) (S.M.R.)

## Keywords:

Frame-type planar truss; Fundamental frequency; Induction; Spectral constants; Spectral isolines; Maple; Dunkerley method; Resonance safety area

## Abstract:

An inductive algorithm is given for deriving the dependence of a planar truss's fundamental frequency of natural vibrations on the number of panels. The truss is statically determinate; the rods are elastic, and the joints of the rods in the nodes are articulated. The mass of the truss is evenly distributed over its nodes. Vertical vibrations of nodes are considered. The approximate Dunkerley method is used to calculate the lower bound of the fundamental frequency. The forces in the rods are determined by the method of cutting nodes. The stiffness of the structure is calculated using the Maxwell - Mohr formula. The sequence of solutions for trusses with a different number of panels is generalized to an arbitrary case by induction. The equilibrium conditions for nodes are reduced to solving a system of linear algebraic ones in the Maple computer mathematics system. The found analytical solution is compared with the numerical solution obtained in the Maple system as the lowest frequency of the entire spectrum and with an independent numerical solution using the finite element method in the SOLIDWORKS system. The error of the analytical solution compared to the numerical one does not exceed a few percent and decreases with an increase in the number of truss panels. Spectral constants, isolines, and a resonant safety region were discovered in the spectra of a family of regular trusses of various orders.

## 1 Введение / Introduction

Расчет основной собственной частоты конструкций является важной задачей строительной механики. Как правило, собственные частоты определяются численно на основе метода конечных элементов [1], [2]. Для приближенной оценки первой (низшей) частоты можно использовать энергетический метод Рэлея [3] и метод Донкерлея [4], [5]. В этом случае для решения задачи о собственных частотах не требуется составлять характеристическую матрицу и решать частотное уравнение. Метод Рэлея использует энергетическую оценку, а метод Донкерлея сводится задачу к расчету парциальных частот, для вычисления которых можно использовать аналитические методы. Известно, что точность метода Рэлея значительно выше, чем метод Донкерлея [6], но итоговая расчетная формула получается в этом случае более громоздкой. Основная частота плоской шпренгельной фермы в зависимости от числа панелей найдена в [7] с использованием системы компьютерной математики. Формула для частоты колебаний Г-образной пространственной фермы получена в [8]. В работе [9] методом индукции выведена аналитическая зависимость основной частоты собственных колебаний пространственной консоли от размеров конструкции и числа панелей. Прогиб плоской регулярной фермы с произвольным числом панелей рассчитан в [10]. Аналитическая зависимость прогиба плоской трапецевидной статически определимой фермы от числа панелей выведена в [11]. Аналитические возможности системы Maple и метод разложения в ряды применительно к расчету строительных конструкций и их элементов использовались в [12]–[14]. Впервые вопрос о существовании статически определимых

Kirsanov, M., Saypulaev, G., Saypulaev, M.

Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss; 2023; *AlfaBuild*; 29 Article No 2902. doi: 10.57728/ALF.29.2

регулярных конструкций был поставлен Hutchinson R.G. и Fleck N.A [15], [16]. Большой вклад в развитие теории регулярных стержневых конструкций внес А. Kaveh [17]–[19]. В этих работах ставились и решались задачи оптимизации регулярных систем. В справочнике [20] собраны формулы для расчета прогиба различных плоских статически определимых ферм с произвольным числом панелей.

В настоящей работе дается вывод аналитической зависимости первой частоты собственных колебаний плоской фермы рамного типа от числа панелей и анализируются закономерности ее спектра.

## 2 Материалы и методы / Materials and Methods

### 2.1 Конструкция фермы и усилия в стержнях

Ферма (рис. 1) имеет  $2n$  панелей в пролете и две опорные панели по концам. Общее число стержней в конструкции равно  $\eta = 8n + 12$ . В это число входят и три опорные стержня, моделирующие левую подвижную и правую неподвижную опоры. Число узлов фермы равно  $4n + 6$ , пролет конструкции —  $2(n+1)a$ . Учитывая, что масса фермы сконцентрирована в ее узлах, а они по предположению совершают колебательные движения только по вертикальной оси  $y$ , число степеней свободы такой модели конструкции равно  $K = 4n + 6$ . Высота фермы  $2h$ , высота

ригеля  $h$ . Раскосы имеют длину  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ . Расчет усилий, необходимых для нахождения матрицы жесткости по формуле Максвелла – Мора, выполняется методом вырезания узлов. Для каждого узла записывается по два уравнения равновесия в проекции на оси координат. Усилия в опорных стержнях соответствуют реакциям опор.

Порядок соединения стержней в узлы и координаты узлов задаются в программе, написанной на языке символьной математики Maple [21]. Для ввода данных узлы нумеруются. Координаты узлов поясов, например, имеют вид:

$$x_1 = y_1 = 0, x_{i+1} = ai, y_{i+1} = h, x_{2n+3} = 2(n+1)a, \\ y_{2n+3} = 0, i = 1 \dots 2n+1. x_{2n+4} = 0, y_{2n+4} = h.$$

Для задания порядка соединения стержней в узлах для каждого стержня  $i = 1, \dots, K$  создается список  $\Phi_i$  его вершин. Стержни поясов кодируются следующим образом:

$$\Phi_i = [i, i + 1], \Phi_{i+2n+2} = [i + 2n + 3, i + 2n + 4], i = 1, \dots, 2n + 2.$$

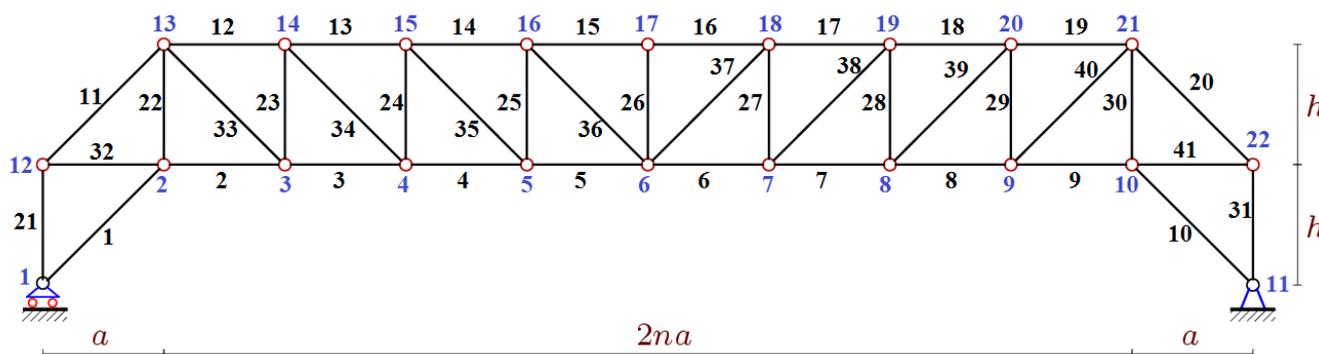


Рис. 1 – Нумерация стержней и узлов,  $n=4$

Fig. 1 – Numbering of elements and nodes,  $n=4$

Расчет усилий в стержнях статически определимой конструкции выполняется методом вырезания узлов. В систему уравнений равновесия узлов в проекциях на оси координат входят и три реакции опор. Система уравнений равновесия решается в аналитической форме с помощью операторов системы Maple. Элементы матрицы системы — это направляющие косинусы усилий, рассчитанных по координатам узлов по концам стержней и порядку их соединений.



### 3 Результаты и обсуждение / Results and Discussion

#### 3.1 Расчет спектра собственных частот

Система дифференциальных уравнений колебаний  $K$  масс записывается в виде:

$$\mathbf{M}_K \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{D}_K \mathbf{Y} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_K]^T$  — вертикальные смещения масс. Обозначено:  $\mathbf{D}_K$  — матрица жесткости фермы,  $\mathbf{M}_K$  — диагональная инерциальная матрица размера, пропорциональная единичной  $\mathbf{M}_K = m\mathbf{I}_K$ ;  $\ddot{\mathbf{Y}}$  — вектор ускорения масс. Умножением слева векторного уравнения (1) на матрицу податливости  $\mathbf{B}_K$ , обратную матрице жесткости с учетом тождества  $\ddot{\mathbf{Y}} = -\omega^2 \mathbf{Y}$ , задача сводится к задаче о собственных значениях матрицы податливости  $\mathbf{B}_K$ :  $\mathbf{B}_K \mathbf{Y} = \lambda \mathbf{Y}$ , где  $\lambda = 1/(m\omega^2)$  — собственное значение матрицы  $\mathbf{B}_K$ ,  $\omega$  — собственная частота колебаний. Полное решение этой задачи в общем случае возможно только численно.

#### 3.2 Метод Донкерлея

Приближенное решение для нижней границы первой частоты может быть найдено в аналитической форме методом парциальных частот Донкерлея.

$$\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^K \omega_i^{-2}, \quad (2)$$

где  $\omega_i$  частота отдельно взятой массы в узле  $i = 1, \dots, K$ . В этом случае каждое уравнение системы (1) имеет вид:

$$m\ddot{y}_i + d_i y_i = 0, \quad i = 1, \dots, K,$$

где  $y_i$  — вертикальное смещение массы в узле  $i$ ,  $d_i$  — коэффициент жесткости. Отсюда, парциальная частота колебаний вычисляется по формуле:  $\omega_i = \sqrt{d_i/m}$ . Жесткость  $d_i$  вычисляется по формуле Максвелла – Мора. Жесткость — величина обратная податливости  $\delta_i$ :

$$\delta_i = 1/d_i = \sum_{j=1}^n (\tilde{S}_j^{(i)})^2 l_j / (EF).$$

Согласно (2):

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{i=1}^K \delta_i = m\Delta. \quad (3)$$

Ряд решений, полученных для различных чисел панелей  $n$ , методами компьютерной математики Maple обобщается на произвольный случай:

$$\begin{aligned} n=1: \Delta &= (26a^3 + 10c^3 + 17h^3) / (2h^2 EF), \\ n=2: \Delta &= (553a^3 + 105c^3 + 125h^3) / (9h^2 EF), \\ n=3: \Delta &= 3(252a^3 + 28c^3 + 29h^3) / (4h^2 EF), \\ n=4: \Delta &= (2277a^3 + 165c^3 + 161h^3) / (5h^2 EF), \\ n=5: \Delta &= (16874a^3 + 858c^3 + 815h^3) / (18h^2 EF), \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Для нахождения общего члена этой последовательности используются операторы `find_recur` и `rsolve` системы Maple. Первый оператор составляет однородное линейное рекуррентное уравнение для членов последовательности, второй — решает это уравнение:



$$\Delta = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF). \quad (5)$$

Коэффициенты в этом выражении имеют вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= (2n+3)(2n+1)(8n^2+16n+15)/45, \\ C_2 &= (2n+3)(2n+1)/3, \\ C_3 &= (4n^3+7n^2+25n+15)/(3(n+1)). \end{aligned} \quad (6)$$

Искомая зависимость нижней границы первой частоты от количества панелей, массы и размеров фермы с учетом (3), (5) и (6) примет вид:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{3EF}{m \left( (2n+3)(2n+1)(a^3(8n^2+16n+15)/15 + c^3) + h^3(4n^3+7n^2+25n+15)/(n+1) \right)}}. \quad (7)$$

Итоговая формула получилась несколько громоздкой. В [22] предложен упрощенный вариант метода Донкерлея, в котором сумма парциальных частот (2) вычисляется через среднее значение частоты:  $\delta_{cp.} = \delta_{max} / 2$ . Узел, прогиб которого от действия на него вертикальной силы максимальный, выбирается опытным путем. Для рассматриваемой фермы — это узел в середине пролета на нижнем поясе. Отсюда:  $\omega_D^{-2} = Km\delta_{max} / 2$ . Значение  $\delta_{max}$  от действия единичной силы рассчитываются при разных значениях числа панелей по формуле Максвелла - Кремоны:

$$\begin{aligned} n=1: \delta_{max} &= 5(6a^3 + 2c^3 + h^3) / (2h^2 EF), \\ n=2: \delta_{max} &= 7(19a^3 + 3c^3 + 2h^3) / (2h^2 EF), \\ n=3: \delta_{max} &= 9(44a^3 + 4c^3 + 3h^3) / (2h^2 EF), \\ n=4: \delta_{max} &= 11(85a^3 + 5c^3 + 4h^3) / (2h^2 EF), \\ n=5: \delta_{max} &= 13(146a^3 + 6c^3 + 5h^3) / (2h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

В общем случае вид решения совпадает с (5):

$$\delta_{max} = (C_4 a^3 + C_5 c^3 + C_6 h^3) / (h^2 EF),$$

где коэффициенты получаются с помощью операторов системы Maple. Для выявления закономерности в данном случае потребовалось рассчитать десять ферм с последовательно увеличивающимся порядком:

$$\begin{aligned} C_4 &= (2n+3)(n+1)(2n^2+4n+3)/6, \\ C_5 &= (2n+3)(n+1)/2, \\ C_6 &= n(2n+3)/2. \end{aligned}$$

Зависимость основной частоты от числа панелей по этому методу имеет вид:

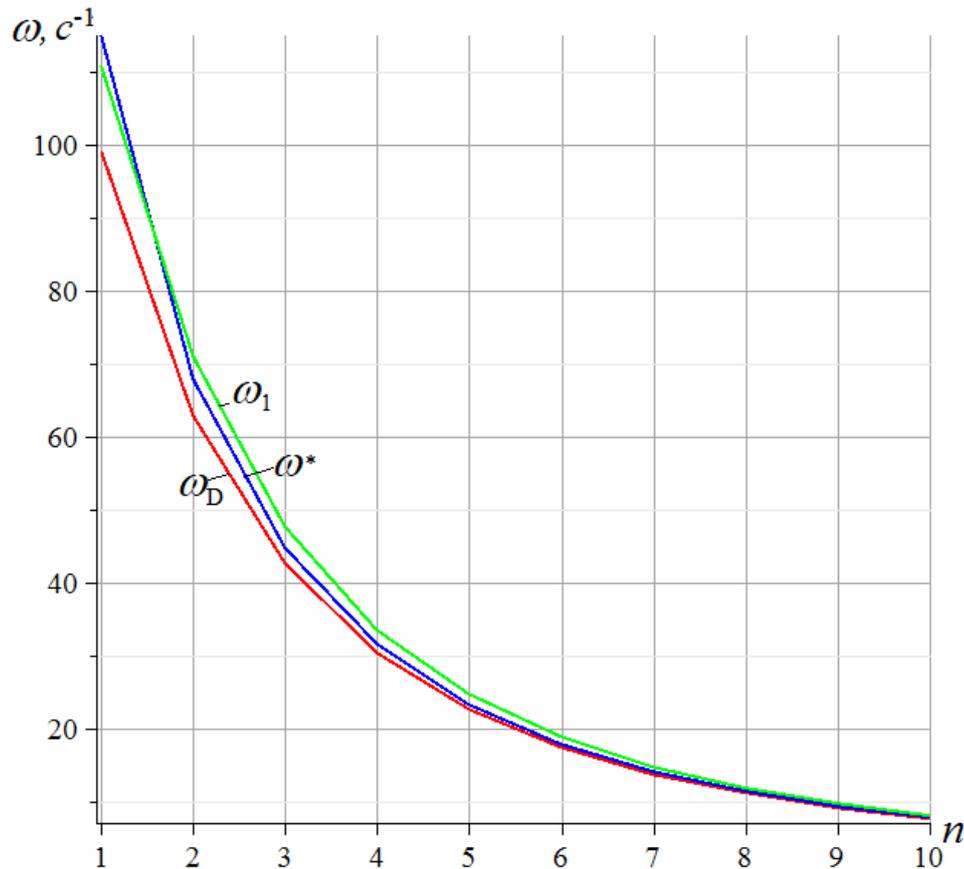
$$\omega^* = h \sqrt{\frac{2EF}{m(2n+3) \left( (2n+1)(a^3(2n^2+4n+3)/3 + c^3) + nh^3 \right)}}. \quad (8)$$

### 3.3 Итоги

#### 3.3.1 Сравнение результатов с численным решением

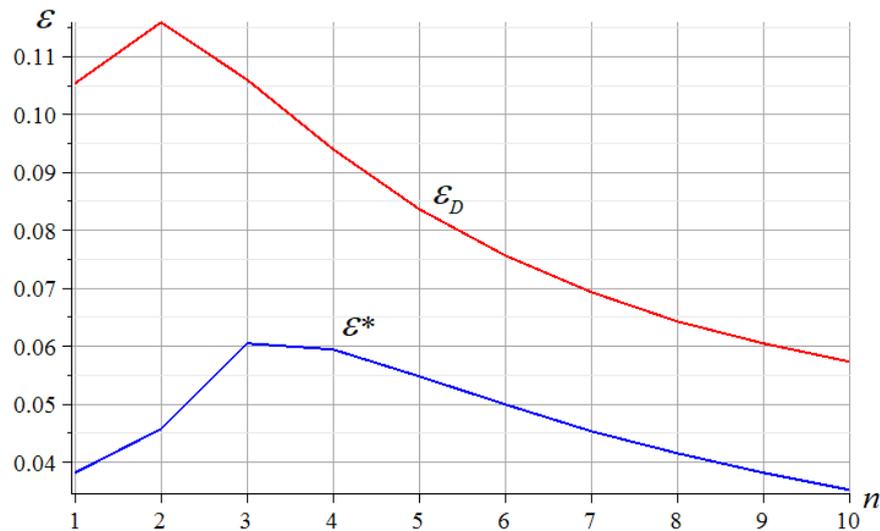
Найденные зависимости (7) и (8) можно сравнить с первой частотой всего спектра собственных частот, полученной численно и условно принятой за точное значение в рамках сделанных предположений. Для этого удобно воспользоваться стандартным оператором *Eigenvalues* из пакета *LinearAlgebra* системы Maple, вычисляющим собственные значения матрицы податливости  $B_K$ . На рисунке 2 показаны кривые зависимости первой частоты  $\omega_1$

спектра, полученной численно и частоты колебаний, рассчитанные аналитически по формулам (7) и (8). Модуль упругости стальных стержней выбран равным  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа, массы в узлах  $m = 200$  кг, размеры:  $a = 2$  м,  $h = 3$  м, площадь поперечных сечений стержней:  $F = 5,9$  см<sup>2</sup>.



**Рис.2 – Зависимость частоты от количества панелей. Три метода;**  
**Fig. 2 – Frequency dependence on the number of panels. Three methods**

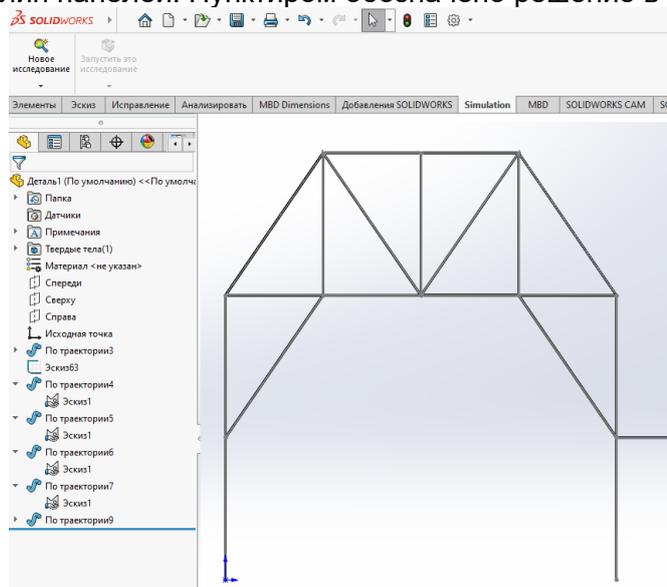
Три кривые практически сливаются, однако частота по Донкерлею  $\omega_D$ , как и ожидалось, всегда меньше первой частоты  $\omega_1$  спектра, вычисленной численно. Частота  $\omega^*$  ближе к численному результату, но в начале графика, при меньших числах панелей, это решение является верхней границей условно точного решения, а при больших значениях  $n$  — это нижняя граница, как и частота Донкерлея. Более точно можно оценить точность результатов по значениям относительных погрешностей  $\varepsilon_D = |\omega_1 - \omega_D| / \omega_1$  и  $\varepsilon_* = |\omega_1 - \omega^*| / \omega_1$ . С увеличением числа панелей погрешность решения  $\omega_D$  по методу Донкерлея все время уменьшаться, если не считать небольшой всплеск в самом начале графика (рис. 3). Также ведет себя и упрощенное решение (8), которое по сравнению с (7) имеет не только более компактную запись, но и приблизительно в два-три раза точнее.



**Рис. 3 – Зависимость погрешности оценки Донкерлея (7) и упрощенного метода (8) от числа панелей,**  
**Fig. 3 – Dependence of the Dunkerley's estimate error (7) and the simplified method (8) on number of panels**

### 3.3.2 Метод конечных элементов

Аналитическое решение по Донкерлею проверялось также методом конечных элементов в программе SOLIDWORKS [23]. Рассмотрена ферма с одной панелью в половине ригеля с теми же данными, что и для графиков 2 и 3 (рис. 4). Масса восьми узлов 1600 кг распределена по стержням, шарниры в узлах заменены жесткими связями. На рисунке 5 в сравнении с аналитическим решением (7) приведена зависимость от высоты фермы, основной частоты, рассчитанной для разных длин панелей. Пунктиром обозначено решение в SOLIDWORKS.



**Рис. 4 – Окно ввода данных программы SolidWorks,**  
**Fig. 4 – SolidWorks Data Entry Window**

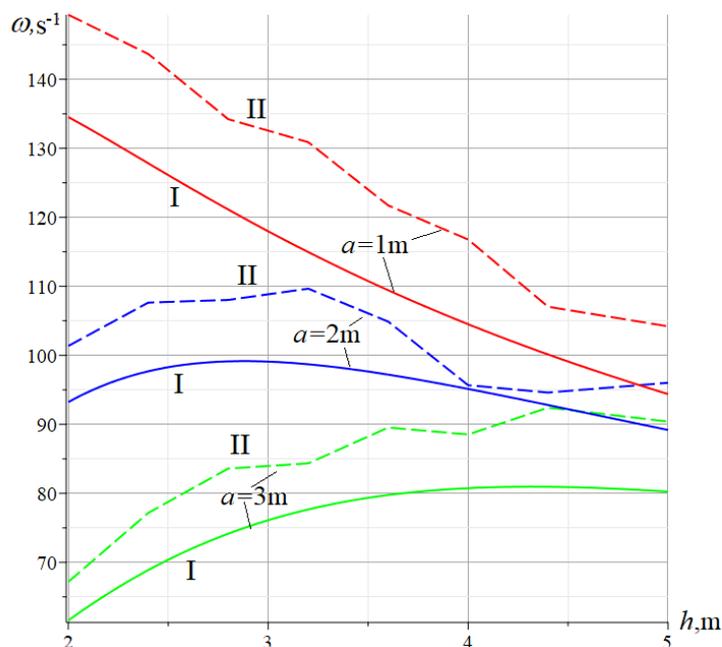


Рис. 5 – Аналитическое решение I, решение SolidWorks II,  
Fig. 5 – Analytical Solution I, SolidWorks Solution II

Метод конечных элементов дает качественно близкое решение к аналитическому, однако, нелинейность и неожиданные изломы кривой, полученной по этому методу, вызывают некоторое к нему недоверие. Возможно, программа SOLIDWORKS автоматически выбирает не лучшее конечно-элементное представление конструкции, а объем численных преобразований, присущих МКЭ, вызывает накопление ошибок. Опыт расчета фермы с большим числом панелей показал значительные затраты времени на вычисление собственной частоты.

### 3.3.3 Спектр частот регулярных ферм

Высшие частоты собственных колебаний редко используются в практических задачах динамики конструкций, однако в некоторых случаях при исследовании резонансных явлений эти частоты могут понадобиться. Совместный спектр серии регулярных ферм различного порядка, рассчитанный численно в системе Maple по описанному выше алгоритму, обнаруживает некоторые интересные закономерности. На рисунке 6 по оси абсцисс отложены порядковые номера частоты в ранжированном спектре, по оси ординат – сами частоты. Спектр каждой фермы определенного порядка  $n=1, \dots, 16$  состоит из отдельных частот-точек, соединенных условно кривой одного цвета. Горизонтальные прямые I, II, III и IV объединяют частоты различных спектров с одним порядком. Прямая IV соответствует высшим частотам всех спектров. Это почти постоянная величина, небольшие отклонения от константы наблюдаются лишь в начале. На прямой III также с небольшой погрешностью, уменьшающейся с увеличением порядка фермы, частоты с номерами  $4n+3$ . На прямой II лежат частоты с номерами  $2n+4$ . К прямой I асимптотически стремятся частоты с номерами  $2n+2$  и  $2n+3$ , образуя спектральную изолинию. Прямые II, III и IV — это спектральные константы [6,24]. Наличие таких констант позволяет легко рассчитать высшие частоты ферм большого порядка через значения частот невысокого порядка, лежащие на этой же прямой. Между прямыми I и II лежит некоторое пространство, в котором нет собственных частот ферм этого семейства. Это некоторая область условной безопасности в смысле возможности резонанса. Если требуется разместить на рассматриваемой ферме некоторое устройство (двигатель), имеющее известную собственную частоту колебаний, то лучше частоты подобрать так, чтобы частота колебаний двигателя попадала в эту область. Аналогичная область безопасности между прямыми III и IV значительно уже и соответствует слишком большим звуковым частотам, поэтому, практического значения она, скорее всего, не имеет. Однако изменение размеров, жесткости и массы конструкции может сдвинуть эту область в сторону меньших частот.

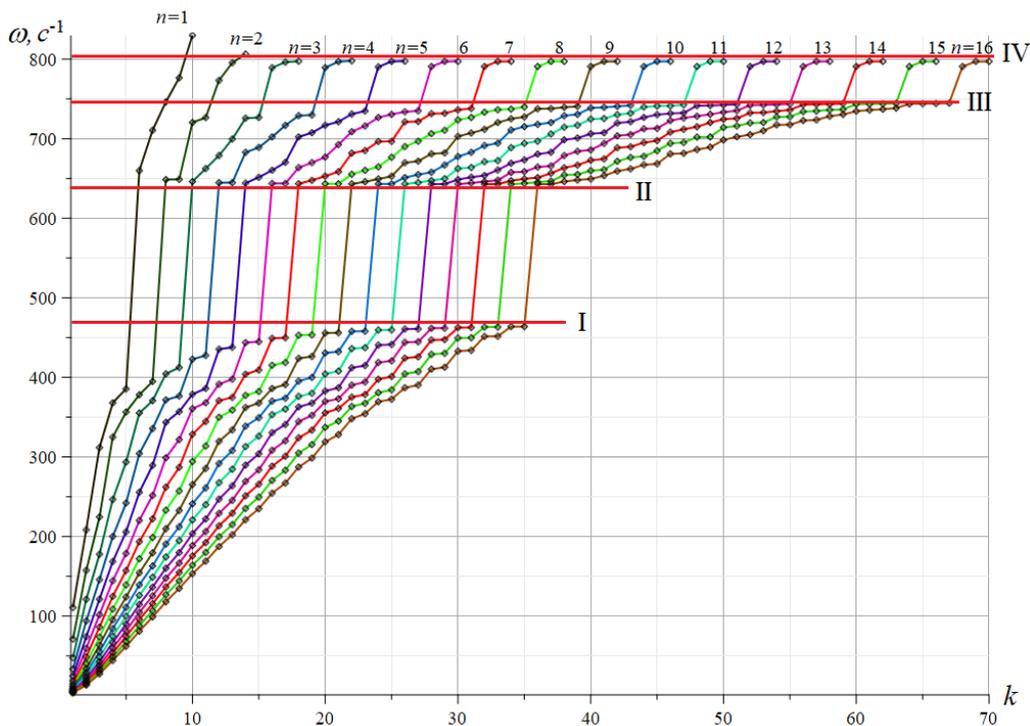


Рис. 6 – Спектры регулярных ферм,  
Fig. 6 – Spectra of regular trusses

## 4 Выводы/ Conclusions

Основными результатами работы являются следующие:

1. Двумя методами выведены формулы зависимости основной частоты от размеров конструкции, массы и числа панелей.
2. Показано, что приближенный (упрощенный) вариант метода Донкерлея дает не только более компактный вид результата, но и в два раза более точное значение по сравнению с исходным методом Донкерлея.
3. Сравнение аналитического решения с численным решением и методом конечных элементов показало хорошую точность результата, растущую с увеличением числа панелей.
4. В спектре собственных частот семейства регулярных ферм обнаружены спектральные константы, изолиния и области резонансной безопасности.

## 5 Fundings

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

## References

- 1 Ignatyev, A. V. and Ignatyev, V.A. (2016) On the Efficiency of the Finite Element Method in the Form of the Classical Mixed Method. *Procedia Engineering*, Elsevier Ltd, **150**, 1760–1765. <https://doi.org/10.1016/J.PROENG.2016.07.167>.
- 2 Vatin, N., Havula, J., Martikainen, L., Sinelnikov, A.S., Orlova, A. V. and Salamakhin, S. V. (2014) Thin-Walled Cross-Sections and Their Joints: Tests and FEM-Modelling. *Advanced Materials Research*, **945–949**, 1211–1215. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.945-949.1211>.
- 3 Vorobev, O.V. (2020) Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **92**, 9204–9204. <https://doi.org/10.18720/CUBS.92.4>.
- 4 Trainor, P.G.S., Shah, A.H. and Popplewell, N. (1986) Estimating the Fundamental Natural Frequency of Towers by Dunkerley's Method. *Journal of Sound and Vibration*, Academic Press, **109**, 285–292. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(86\)80009-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(86)80009-8).
- 5 Low, K.H. (2000) Modified Dunkerley Formula for Eigenfrequencies of Beams Carrying



- Concentrated Masses. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier Science Ltd, **42**, 1287–1305. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00049-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00049-1).
- 6 Kirsanov, M.N. and Luong, C.L. (2023) Natural Frequency Spectra of Spatial Structure. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **107**, 10604–10604. <https://doi.org/10.4123/CUBS.106.04>.
- 7 Manukalo, A.S. (2023) Analysis of a Planar Sprengel Truss First Frequency Natural Oscillations Value. *Structural Mechanics and Structures*, **37**, 54–60. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.006>.
- 8 Komerzan, E. V., Maslov, A.N. (2023) Estimation of the L-Shaped Spatial Truss Fundamental Frequency Oscillations. *Structural Mechanics and Structures*, **37**, 35–45. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.004>.
- 9 Sviridenko, O. V and Komerzan, E. V. (2022) The Dependence of the Natural Oscillation Frequency of the Console Truss on the Number of Panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **101**, 10101. <https://doi.org/10.4123/CUBS.101.1>.
- 10 Komerzan, E. V., Lushnov, N.A. and Osipova, T.S. (2022) Analytical Calculation of the Deflection of a Planar Truss with an Arbitrary Number of Panels. *Structural mechanics and structures*, **33**, 17–25. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.33.2.002>.
- 11 Ovsyannikova, V.M. (2020) Dependence of Deformations of a Trapezous Truss Beam on the Number of Panels. *Structural Mechanics and Structures*, **26**, 13–20. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44110286>.
- 12 Goloskokov, D.P. and Matrosov, A. V. (2018) Approximate Analytical Approach in Analyzing an Orthotropic Rectangular Plate with a Crack. *Materials Physics and Mechanics*, Institute of Problems of Mechanical Engineering, **36**, 137–141. [https://doi.org/10.18720/MPM.3612018\\_15](https://doi.org/10.18720/MPM.3612018_15).
- 13 Galileev, S.M., Matrosov, A. V. and Verizhenko, V.E. (1995) Method of Initial Functions for Layered and Continuously Inhomogeneous Plates and Shells. *Mechanics of Composite Materials*, Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers, **30**, 386–392. <https://doi.org/10.1007/BF00634764>.
- 14 Goloskokov, D.P. and Matrosov, A. V. (2018) Approximate Analytical Solutions in the Analysis of Thin Elastic Plates. *AIP Conference Proceedings*, American Institute of Physics Inc., **1959**. <https://doi.org/10.1063/1.5034687>.
- 15 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2006) The Structural Performance of the Periodic Truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Pergamon, **54**, 756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>.
- 16 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2005) Microarchitected Cellular Solids - The Hunt for Statically Determinate Periodic Trusses. *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, **85**, 607–617. <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>.
- 17 Kaveh A, Javadi, S. (2014) Shape and Size Optimization of Trusses with Multiple Frequency Constraints Using Harmony Search and Ray Optimizer for Enhancing the Particle Swarm Optimization Algorithm. *Acta Mech.*, **225**, 1595–1605. <https://doi.org/10.1007/s00707-013-1006-z>
- 18 Kaveh, A. (2013) Optimal Analysis of Structures by Concepts of Symmetry and Regularity. *Optimal Analysis of Structures by Concepts of Symmetry and Regularity*, Springer-Verlag Wien, **9783709115**, 1–463. <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1565-7>.
- 19 Kaveh, A., Dadras, A. and Montazeran, A.H. (2018) Chaotic Enhanced Colliding Bodies Algorithms for Size Optimization of Truss Structures. *Acta Mechanica*, Springer-Verlag Wien, **229**, 2883–2907. <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2149-8>.
- 20 Kirsanov, M. (2019) Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, GB. <https://www.cambridgescholars.com/product/978-1-5275-5976-9>.
- 21 Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N. and Serdjus, D.O. (2020) Calculation of Deformations of a Cantilever-Frame Planar Truss Model with an Arbitrary Number of Panels. *Vestnik MGSU*, **4**, 510–517. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.4.510-517>.
- 22 Kirsanov, M. (2023) Simplified Dunkerley Method for Estimating the First Oscillation Frequency of a Regular Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **108**. <https://doi.org/10.4123/CUBS.108.1>.
- 23 Shih, R. (2014) Introduction to Finite Element Analysis Using SolidWorks Simulation 2014 - Google. SDC Publications. [https://www.google.ru/books/edition/Introduction\\_to\\_Finite\\_Element\\_Analysis/gh1kAgAAQBAJ?](https://www.google.ru/books/edition/Introduction_to_Finite_Element_Analysis/gh1kAgAAQBAJ?)



- hl=ru&gbpv=0.
- 24 Kirsanov, M. (2023) Model of a Hexagonal Prismatic Truss. Oscillation Frequency Spectrum. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **106**, 10601. <https://doi.org/10.4123/CUBS.106.01>.