



Research Article

Received: May 21, 2023

Accepted: June 18, 2023

Published: June 25, 2023

ISSN 2658-5553

## The lower limit of natural frequency of a L-type planar truss

Kirsanov, Mikhail Nikolaevich <sup>1\*</sup> Pakhomov, Vasiliy Aleksandrovich <sup>1</sup> <sup>1</sup> Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation; [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru) (K.M.N.); [p-vasiliy-a@yandex.ru](mailto:p-vasiliy-a@yandex.ru) (P.V.A.)Correspondence: \*email [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru); contact phone +7(965)183-35-34

### Keywords:

Truss; Natural oscillation frequency; Induction; Maple; Planar truss; Dunkerley method

### Abstract:

The point masses at the nodes are employed to model the inertial characteristics of a flat truss model with articulated supports. Each mass has two degrees of freedom. The statically determined structure's stiffness matrix is ascertained using the Maxwell-More equation. Implementing the secant knots technique within the Maple computer mathematical system is employed to derive the forces exerted on the anchor rods through analytical means. The minimum value for the first natural frequency is determined via the employment of the Dunkerley method. Individual solutions for trusses with a sequentially increasing number of panels are generalized to the arbitrary case by the double induction method on the number of panels in the beam and the number of panels in the supporting side parts of the truss. The analytical correlation is juxtaposed with the numerical resolution of the problem on the spectrum of natural frequencies of the structure. As the quantity of panels is augmented, there is a corresponding enhancement in the precision of the analytical evaluation, as demonstrated in empirical findings.

## 1 Введение / Introduction

В строительной механике расчет частот собственных колебаний является одной из наиболее важных задач динамики конструкций. При этом для практики наименьшая частота, являющаяся первой, представляет особое значение. Следует отметить, что при её определении, зачастую, рассматривается весь спектр частот колебаний конструкции. В общем случае данная задача решается численно [1], [2]. Приближенный энергетический метод Рэлея [3] дает верхнюю оценку для первой собственной частоты. При удачном выборе режима колебаний для первой моды точность метода Рэлея значительно выше, чем метода Донкерлея [4]–[6], но его реализация значительно сложнее. С помощью метода Донкерлея может быть получена простая аналитическая нижняя граница для первой частоты. В этом случае задача о собственных значениях матрицы сводится к простому вычислению ее следа. Это особенно эффективно в задачах, где самая низкая частота заметно ниже всех остальных. Кроме того, в отличие от метода Рэлея, метод Донкерлея не требует предсказания формы колебания по первой частоте. Для регулярных структур с периодичностью и симметрией в сочетании с индукционным методом метод Донкерлея не только позволяет получить аналитическое решение для первой частоты, но и найти зависимость решения от порядка регулярности, что существенно расширяет область применимости аналитического решения. Обычно порядок в регулярных фермах равен числу панелей. Общие проблемы существования и расчета регулярных статически определимых ферм изучены в [7], [8]. Для расчета величины прогиба плоских регулярных ферм в системе Maple [9] имеются некоторые аналитические решения [10]–[12]. Аналитический расчет прогиба плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей содержится в [13]. В справочнике [14] даны аналитические зависимости прогиба различных регулярных статически определимых плоских схем арок, консолей, ферм и рам от числа панелей для некоторых видов нагрузок, включая схемы, допускающие для ряда чисел панелей кинематическую изменчивость. Формула для расчета

Kirsanov, M.; Pakhomov V.

The lower limit of natural frequency and the oscillation spectrum of a planar truss; 2023; *AlfaBuild*; 28 Article No 2805. doi: 10.57728/ALF.28.5

внешне статически неопределимой фермы получена в [15]. В [16] решены задачи деформации Г-образной конструкции из тонкостенных стержней, заключающиеся в создании и расчете в программном комплексе ABAQUS пространственных конечно-элементных моделей узловых соединений, выполненных из тонкостенных стержней под разными углами, разной жесткости и с учетом конструктивных элементов узлового соединения. В [17] выведена формула для оценки первой частоты собственных колебаний пространственной консольной фермы. Аналитический расчет нижней границы первой частоты колебаний двухпролетной плоской фермы методом Донкерлея в системе Maple дан в [18]. Этим же методом в [19] выведена формула частоты колебаний фермы типа Финка, в [20] — шпренгельной фермы балочного типа. Формула для нижней оценки собственных колебаний плоской регулярной балочной фермы с прямолинейным верхним поясом получена в [21]. Простая аналитическая оценка основной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы найдена в [22]. В [23] методом индукции выведена аналитическая оценка первой частоты собственных колебаний регулярной фермы с горизонтальными связями в решетке. Метод начальных функций применен в [24], [25] для получения аналитических решений элементов строительных конструкций. Аналитическое приближение для расчета ортотропных прямоугольных пластин с трещиной найдено в [26] с использованием системы символьной математики Maple.

В настоящей работе выводится аналитическая зависимость первой частоты собственных колебаний плоской модели фермы Г-образного кронштейна. Особенность задачи — наличие двух параметров регулярности: числа панелей  $n$  в ригеле и числа панелей  $m$  по высоте стойки.

## 2 Материалы и методы / Materials and Methods

### 2.1 Конструкция фермы и усилия в стержнях

Рассматриваемая ферма представляет собой плоскую конструкцию из двух частей: опорной части высотой  $mh + c$  и консольной длиной  $nb$  (рис. 1), где  $n$  — число панелей в горизонтальной части фермы,  $m$  — число панелей в вертикальной части фермы.

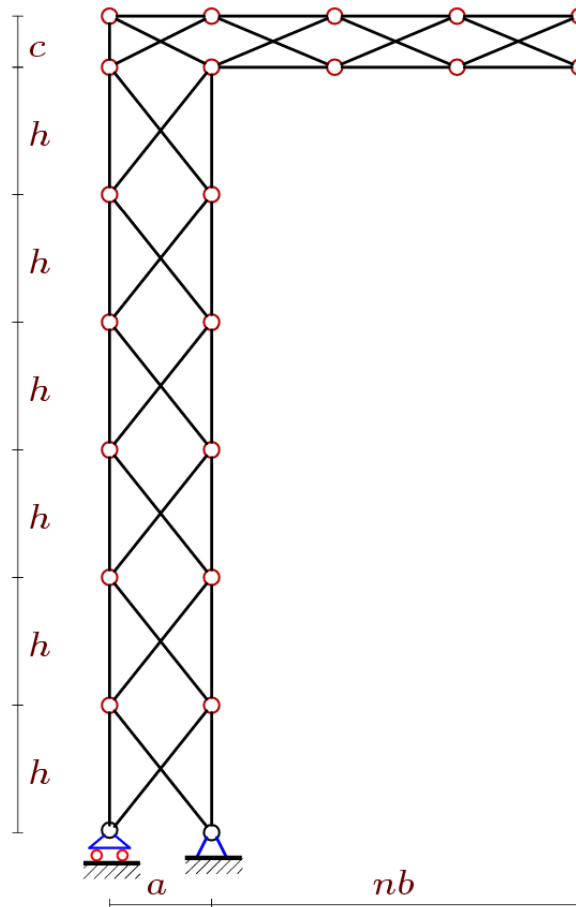


Рис. 1 – Схема фермы,  $n=3$ ,  $b=a$ ,  $c=h$ ,  $m=6$   
 Fig. 1 – Truss scheme,  $n=3$ ,  $b=a$ ,  $c=h$ ,  $m=6$

Панели в вертикальной части фермы состоят из двух вертикальных стержней длиной  $h$  и двух раскосов длиной  $d = \sqrt{a^2 + h^2}$ . Панели в горизонтальной части фермы состоят из двух горизонтальных стержней длиной  $b$  и двух раскосов длиной  $\sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + h^2} = d$ . В основании вертикальной части фермы ферма имеет левую подвижную и правую неподвижную шарнирные опоры и содержит  $2(n+m+2)$  внутренних узлов. Число стержней, включая три опорные, равно  $\eta = 4n + 4m + 7$ . В это число входят три опорные стержня,  $2m+2$  стержней длиной  $h$ ,  $2n+1$  стержней длиной  $a$  и  $2(m+n+1)$  раскосов длиной  $d$ . Записывая по два уравнения равновесия в проекции на оси координат для каждого узла, включая два опорные, можно получить замкнутую систему уравнений для усилий в стержнях и реакций опор, необходимую для решения задачи.

Структура соединений стержней и координаты узлов в решетке задаются в программе, написанной на языке символьной математики Maple [27]. Ввод данных состоит из двух основных частей – ввода координат узлов и ввода порядка соединения стержней поясов и решетки. Стержни и узлы пронумерованы (рис. 2). Порядок соединения стержней задается по аналогии с определением структуры графа в дискретной математике. Вводятся специальные упорядоченные списки номеров вершин концов соответствующих стержней. Начало координат выбирается в левой подвижной опоре в основании вертикальной части фермы. Фрагмент программы ввода координат в системе Maple имеет вид:

```

h1:=m*h+c
for i to m+1 do x[i]:=0:                y[i]:=h*i-h: end: x[m+2]:=0: y[m+2]:=h1:
for i to n+1 do
  x[i+m+2]:=b*i+a-b:                  y[i+m+2]:=h1:
  x[i+2*m+n+3]:=b*i+a-b:              y[i+2*m+n+3]:=h1-c:
end:
for i to m do x[i+m+n+3]:=a:          y[i+m+n+3]:=h*i-h: end:

```

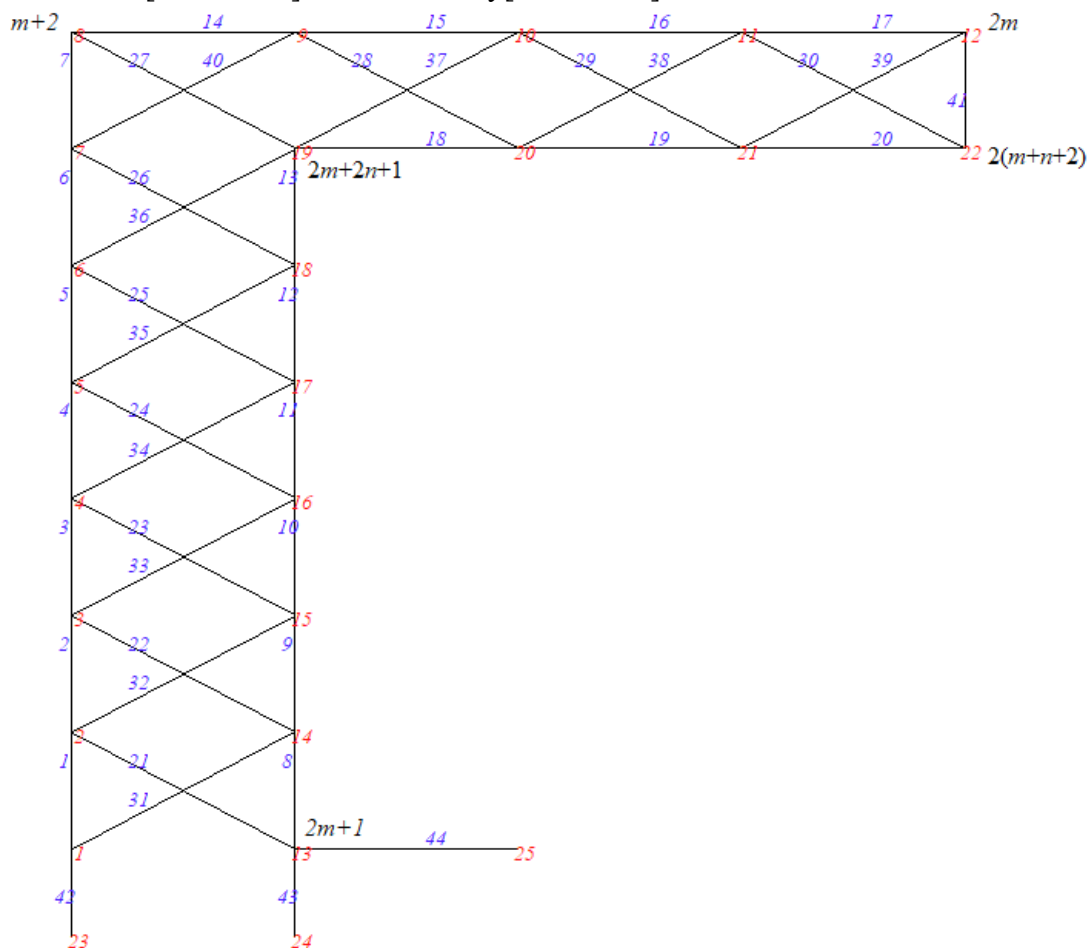


Рис. 2 – Нумерация стержней и узлов,  $n=3$ ,  $m=6$   
 Fig. 2 – Numbering of elements and nodes,  $n=3$ ,  $m=6$



Для расчета усилий в стержнях используется метод вырезания узлов. Уравнения равновесия отдельных узлов в проекциях на оси координат составляются с помощью операторов системы Maple. Матрица системы разрешающих уравнений состоит из направляющих косинусов усилий, вычисленных по данным о координатах концевых узлов стержней.

### 3 Результаты и обсуждение / Results and Discussion

#### 3.1 Расчет спектра собственных частот

Учитывая, что каждый узел имеет две степени свободы, общее число степеней свободы рассматриваемой системы масс равно  $2N$ . Система дифференциальных уравнений колебаний  $N$  масс записывается в матричном виде:

$$\mathbf{M}_{2N}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}_{2N}\mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{U} = [u_1, \dots, u_{2N}]^T$  — смещения масс. Этот вектор включает в себя как горизонтальные, так и вертикальные перемещения масс. Здесь  $\mathbf{D}_{2N}$  — матрица жесткости,  $\mathbf{M}_{2N}$  — диагональная инерциальная матрица размера  $2N \times 2N$  и  $\ddot{\mathbf{U}}$  — вектор ускорения. Поскольку все массы одинаковы, инерциальная матрица выражается через единичную матрицу  $\mathbf{M}_N = \mu \mathbf{I}_N$ . Если умножить (1) на  $\mathbf{B}_{2N}$  слева, то с учетом тождества  $\ddot{\mathbf{U}} = -\omega^2 \mathbf{U}$ , задачу можно свести к задаче о собственных значениях матрицы  $\mathbf{B}_{2N}$ :  $\mathbf{B}_{2N}\mathbf{U} = \lambda \mathbf{U}$ , где  $\lambda = 1/(\mu\omega^2)$  — собственное значение матрицы  $\mathbf{B}_{2N}$ ,  $\omega$  — собственная частота колебаний. Решение этой задачи возможно только численно.

#### 3.2 Метод Донкерлея

Аналитическое выражение для первой частоты колебаний находится на основе приближенного метода Донкерлея. Введено обозначение  $\omega_{k,v}$  для парциальной частоты колебаний массы  $\mu$  в узле  $k$  по вертикали и  $\omega_{k,h}$  — в качестве частоты колебаний по горизонтали. Нижняя оценка первой частоты вибрации дается по формуле:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{k=1}^N \left( \omega_{k,v}^{-2} + \omega_{k,h}^{-2} \right). \quad (2)$$

Уравнение (1) в случае колебаний одной массы имеет простой скалярный вид:

$$\mu \ddot{u}_k + d_k u_k = 0, \quad k = 1, \dots, N,$$

где  $u_k$  — смещение массы,  $d_k$  — коэффициент жесткости. Частота колебаний отдельной массы имеет вид:  $\omega_k = \sqrt{d_k / \mu}$ . По формуле Максвелла – Мора вычисляется жесткость  $d_k$ , которая является обратной величиной податливости:

$$\delta_k = 1 / d_k = \sum_{\alpha=1}^n \left( \tilde{S}_{\alpha}^{(k)} \right)^2 l_{\alpha} / (EF).$$

Согласно (2):

$$\omega_D^{-2} = \mu \sum_{k=1}^N \delta_k = \mu (\Delta_v + \Delta_h). \quad (3)$$

Суммы  $\Delta_v$  и  $\Delta_h$  рассчитываются отдельно для вертикальных и горизонтальных колебаний соответственно. Чтобы получить зависимость решения от количества панелей  $n$  в горизонтальной части фермы и количества панелей  $m$  в вертикальной части фермы, требуется двойная индукция. Чтобы сделать это, во-первых, для  $m=1$  согласно данным решений для последовательности ферм с  $n=1, 2, 3, \dots$ , выводится общая формула, затем та же процедура повторяется для  $m=2, 3, 4, \dots$ . Ряд решений, полученных для различных  $m$ , обобщается на



произвольный случай. Для суммы, соответствующей вертикальным колебаниям, решение оказывается зависит от  $m$ . При  $m=1$ :

$$n = 1: \Delta_h = (6a^3 + 6d^3 + 19h^3) / (h^2 EF)$$

$$n = 2: \Delta_h = (30a^3 + 22d^3 + 54h^3) / (h^2 EF)$$

$$n = 3: \Delta_h = (92a^3 + 52d^3 + 123h^3) / (h^2 EF)$$

$$n = 4: \Delta_h = (220a^3 + 100d^3 + 238h^3) / (h^2 EF), \dots$$

Используя операторы системы Maple из пакета genfunk, можно найти общие члены последовательностей коэффициентов в этих выражениях:

$$\Delta_v = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF). \quad (4)$$

Коэффициенты находятся как решения рекуррентных линейных однородных уравнений. При  $m=1$ :

$$C_1 = n(n+1)(n^2 + 3n + 5) / 3,$$

$$C_2 = n(2n+7)(n+1) / 3,$$

$$C_3 = (6n^3 + 15n^2 + 18n + 18) / 3.$$

Расчет коэффициентов при  $m=2, 3, 4, \dots$  показывает, что коэффициенты  $C_1, C_2$  не зависят от  $m$ , а для  $C_3$  получается последовательность:

$$m = 2: C_3 = (10n^3 + 27n^2 + 32n + 36) / 3,$$

$$m = 3: C_3 = (14n^3 + 39n^2 + 46n + 60) / 3,$$

$$m = 4: C_3 = (18n^3 + 51n^2 + 60n + 90) / 3, \dots$$

Если продолжить этот процесс дальше, то коэффициенты получают следующее обобщение на произвольное число панелей в опорной части  $m$ :

$$C_1 = n(n+1)(n^2 + 3n + 5) / 3,$$

$$C_2 = n(2n+7)(n+1) / 3,$$

$$C_3 = (2(1+2m)n^3 + 3(1+4m)n^2 + 2(2+7m)n + 3(m+1)(m+2)) / 3.$$

Таким же образом, для суммы, связанной с горизонтальными колебаниями массы, выводятся формулы для произвольных чисел  $m$  и  $n$ :

$$\Delta_h = (C_4 a^3 + C_5 c^3 + C_6 h^3) / (a^2 EF),$$

$$C_4 = \frac{(-1)^{n+m} - (-1)^n + 2(3 - 2(-1)^m)n^2 + 2(7 + 2m - 3(-1)^m)n + 5 + 2m - (-1)^m}{2},$$

$$C_5 = 2(1 - (-1)^m)n^2 + (6 + 4m - 3(-1)^m)n + 2(m+1)(m+2),$$

$$C_6 = \frac{(4m^3 + 6m^2 + 8m + 6 - 3(-1)^m)n + (m+1)(m+2)(m^2 + 3m + 6)}{3}.$$

Окончательное выражение зависимости нижней границы первой частоты от геометрических параметров конструкции, включая количество панелей в вертикальной и горизонтальной частях фермы, примет вид:

$$\omega_D = \sqrt{\frac{EF}{\mu \left( (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / h^2 + (C_4 a^3 + C_5 c^3 + C_6 h^3) / a^2 \right)}}. \quad (5)$$

Чтобы проверить результат, можно выполнить все преобразования в обратном порядке: сначала выполнить индукцию для  $m$ , а затем для  $n$ . Еще лучше сравнить полученную частоту с наименьшей из всего спектра собственных частот колебаний системы, полученных численно.

### 3.3 Итоги

Решить проблему колебаний системы при числе степеней свободы  $N > 3$ , за исключением редких случаев, можно только численно. Задача сводится к определению собственных значений матрицы податливости  $B_N$ . Для нахождения собственных чисел используется стандартный оператор *Eigenvalues* из пакета *LinearAlgebra* системы Maple. На рисунке 3 показаны кривые зависимости от количества панелей в вертикальной части фермы первой частоты  $\omega_1$  спектра, полученного численно и частоты колебаний, рассчитанной аналитически по выведенной формуле (5) для значения  $\omega_D$  при  $m = 6$ . Модуль упругости материала стержней выбран равным  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, массы в узлах  $\mu = 300$  кг, размеры:  $a = 3$  м,  $h = 4$  м, площадь поперечных сечений стержней:  $F = 25$  см<sup>2</sup>.

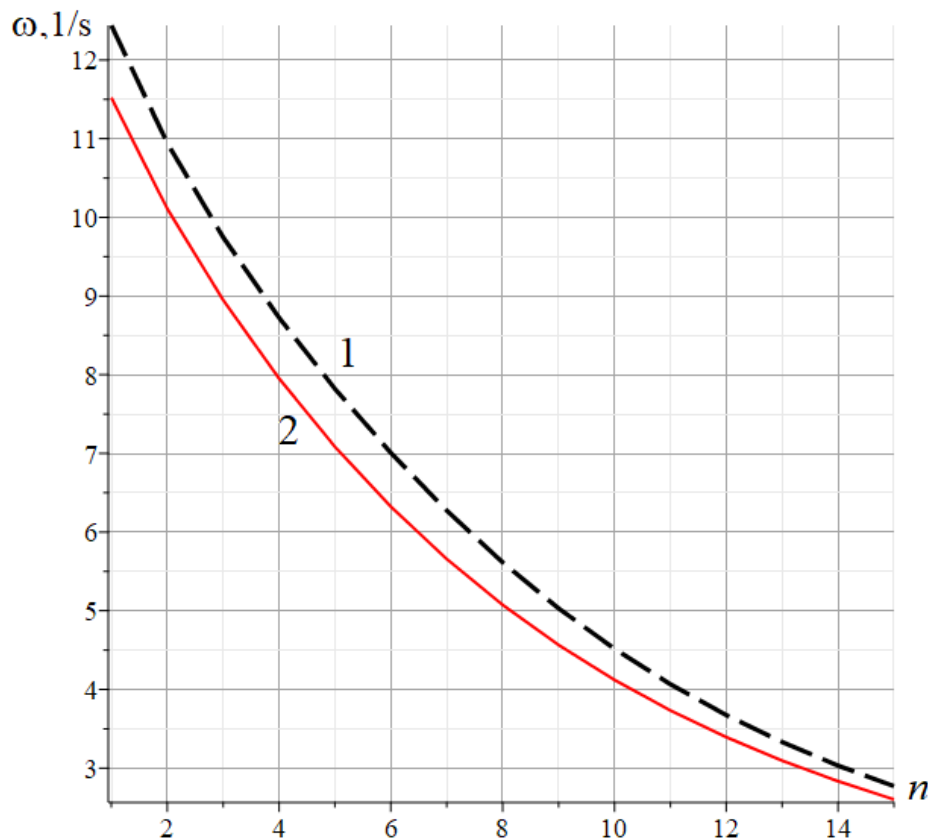


Рис. 3 – Зависимость частоты от количества панелей; 1 - численное решение  $\omega_1$ ; 2 - аналитическая оценка  $\omega_D$ ,  $m=6$ .

Fig. 3 – Frequency dependence on the number of panels; 1 is numerical solution  $\omega_1$ ; 2 is analytical assessment  $\omega_D$ ,  $m=6$ .

Для сравнения аналитического результата с численным, полученным как минимальная частота спектра, вводится относительная погрешность  $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$ . На рисунке 4 показано, что с увеличением количества панелей в консольной части фермы погрешность сначала увеличивается, а после некоторого значения начинает уменьшаться. Участки с меньшим количеством панелей  $m$  имеют максимальную погрешность при определенном значении  $n$ . При больших значениях числа панелей в вертикальной части конструкции экстремум смещается в область меньших  $n$  или вообще исчезает. При  $m=8$  экстремум выражен весьма незначительно. В любом случае погрешность полученной формулы достаточно мала. Для выбранных

конструктивных характеристик это значение не превышает 15%. С уменьшением числа панелей  $m$  погрешность увеличивается.

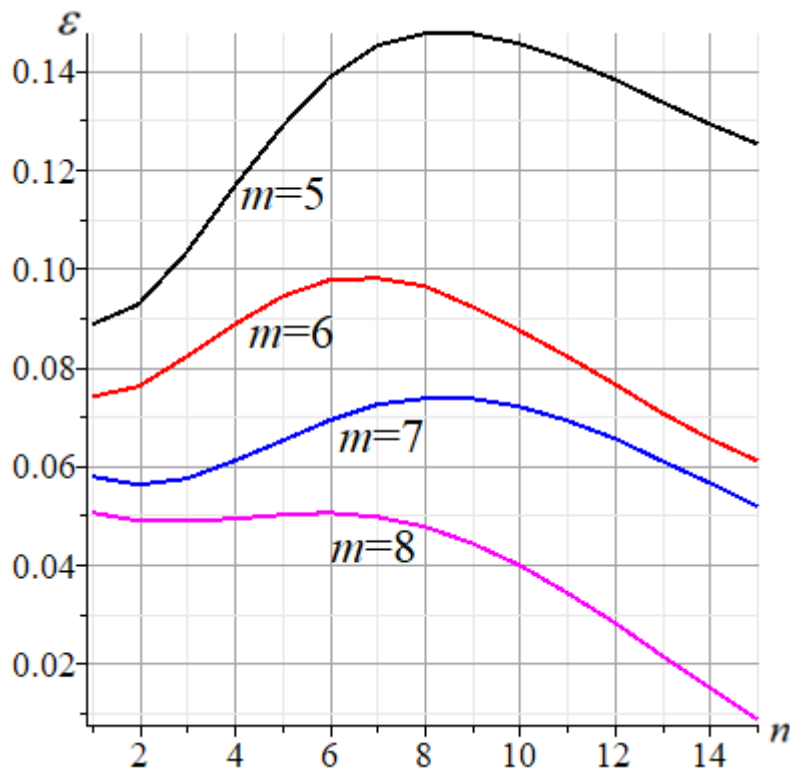


Рис. 4 – Погрешность оценки Донкерлея в зависимости от количества панелей.  
Fig. 4 – The error of Dunkerley's estimation depending on the number of panels.

## 4 Выводы/ Conclusions

Основными результатами работы являются следующие:

1. Разработана математическая модель для изучения собственных колебаний плоской фермы кронштейна с произвольным количеством панелей в опоре и ригеле.
2. При помощи метода двойной индукции получено выражение для нижнего предела первой частоты колебаний конструкции в зависимости от размера панелей и их числа.
3. Сравнение с численным решением показало, что найденное аналитическое решение обладает хорошей точностью, растущей с увеличением числа панелей.

## 5 Fundings

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

## References

- 1 Ignatyev, A. V. and Ignatyev, V.A. (2016) On the Efficiency of the Finite Element Method in the Form of the Classical Mixed Method. *Procedia Engineering*, Elsevier Ltd, **150**, 1760–1765. <https://doi.org/10.1016/J.PROENG.2016.07.167>.
- 2 Vatin, N., Havula, J., Martikainen, L., Sinelnikov, A.S., Orlova, A. V. and Salamakhin, S. V. (2014) Thin-Walled Cross-Sections and Their Joints: Tests and FEM-Modelling. *Advanced Materials Research*, **945–949**, 1211–1215. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.945-949.1211>.
- 3 Kirsanov, M.N. and Luan, C. (2023) Model of a Hexagonal Prismatic Truss. Oscillation Frequency Spectrum. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **106**, 10601. <https://doi.org/10.4123/CUBS.106.01>.
- 4 Levy, C. (1991) An Iterative Technique Based on the Dunkerley Method for Determining the Natural Frequencies of Vibrating Systems. *Journal of Sound and Vibration*, Academic Press, **150**, 111–118. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90405-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90405-9).
- 5 Rutenberg, A. (1976) A Lower Bound for Dunkerley's Formula in Continuous Elastic Systems.

Kirsanov, M.; Pakhomov V.

The lower limit of natural frequency and the oscillation spectrum of a planar truss; 2023; *AlfaBuild*; **28** Article No 2805. doi: 10.57728/ALF.28.5



- Journal of Sound and Vibration*, Academic Press, **45**, 249–252. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(76\)90599-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(76)90599-X).
- 6 Low, K.H. (2000) A Modified Dunkerley Formula for Eigenfrequencies of Beams Carrying Concentrated Masses. *International Journal of Mechanical Sciences*, Pergamon, **42**, 1287–1305. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00049-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00049-1).
- 7 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2005) Microarchitected Cellular Solids - The Hunt for Statically Determinate Periodic Trusses. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **85**, 607–617. <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>.
- 8 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2006) The Structural Performance of the Periodic Truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Pergamon, **54**, 756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>.
- 9 Kirsanov, M. (2019) Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, GB. <https://www.cambridgescholars.com/product/978-1-5275-5976-9>.
- 10 Ovsyannikova, V.M. (2020) Dependence of Deformations of a Trapezoidal Truss Beam on the Number of Panels. *Structural Mechanics and Structures*, **26**, 13–20. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44110286>.
- 11 Sviridenko, O.V. and Komerzan, E.V. (2021) Analytical Calculation of the Deflection of a Plane External Statically Undetermined Truss with an Arbitrary Number of Panels. *Structural Mechanics and Structures*, **2**, 7–11. [https://elibrary.ru/download/elibrary\\_46130662\\_20946175.pdf](https://elibrary.ru/download/elibrary_46130662_20946175.pdf).
- 12 Dai, Q. (2021) Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. *AlfaBuild*, **17**, 1701. <https://doi.org/10.34910/ALF.17.1>.
- 13 Komerzan, E.V., Lushnov, N.A. and Osipova, T.S. (2022) Analytical Calculation of the Deflection of a Planar Truss with an Arbitrary Number of Panels. *Structural Mechanics and Structures*, **33**, 17–25. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.33.2.002>.
- 14 Kirsanov, M. (2020) Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, GB. <https://cambridgescholars.com/product/978-1-5275-5976-9>.
- 15 Ilyushin, A.S. (2019) The Formula for Calculating the Deflection of a Compound Externally Statically Indeterminate Frame. *Structural mechanics and structures*, **22**, 29–38. <https://elibrary.ru/item.asp?id=41201106>.
- 16 Rybakov, V.A., Jos, V.A. (2022) Stress State of  $\Gamma$ -Shaped Thin-Walled Rod Joints in Bending Torsion. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **99**, 9903. <https://doi.org/10.4123/CUBS.99.3>.
- 17 Sviridenko, O. V and Komerzan, E. V. (2022) The Dependence of the Natural Oscillation Frequency of the Console Truss on the Number of Panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **101**, 10101. <https://doi.org/10.4123/CUBS.101.1>.
- 18 Petrenko, V.F. (2021) The Natural Frequency of a Two-Span Truss. *AlfaBuild*, 2001. <https://doi.org/10.34910/ALF.20.1>.
- 19 Petrichenko, E.A. (2020) Lower Bound of the Natural Oscillation Frequency of the Fink Truss. *Structural Mechanics and Structures*, **26**, 21–29. [https://www.elibrary.ru/download/elibrary\\_44110287\\_71394021.pdf](https://www.elibrary.ru/download/elibrary_44110287_71394021.pdf).
- 20 Manukalo, A.S. (2023) Analysis of a Planar Sprengel Truss First Frequency Natural Oscillations Value. *Structural Mechanics and Structures*, **37**, 54–60. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.006>.
- 21 Shchigol, E.D. (2023) The Formula for the Lower Estimate of the Natural Oscillations of a Flat Regular Girder Truss with a Rectilinear Upper Belt. *Structural Mechanics and Structures*, **37**, 46–53. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.005>.
- 22 Komerzan, E. V., Maslov, A.N. (2023) Estimation of the L-Shaped Spatial Truss Fundamental Frequency Oscillations. *Structural Mechanics and Structures*, **37**, 35–45. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.004>.
- 23 Komerzan, E. V., Maslov, A.N. (2023) Analytical Evaluation of a Regular Truss Natural Oscillations Fundamental Frequency. *Structural Mechanics and Structures*, **37**, 17–26. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.002>.
- 24 Matrosov, A. V. (2022) An Exact Analytical Solution for a Free-Supported Micropolar Rectangle by the Method of Initial Functions. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, Birkhauser,





73. <https://doi.org/10.1007/S00033-022-01714-Y>.
- 25 Matrosov, A. V. (2019) Computational Peculiarities of the Method of Initial Functions. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, Springer Verlag, **11619 LNCS**, 37–51. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-24289-3\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-24289-3_4).
- 26 Goloskokov, D.P. and Matrosov, A. V. (2018) Approximate Analytical Approach in Analyzing an Orthotropic Rectangular Plate with a Crack. *Materials Physics and Mechanics*, Institute of Problems of Mechanical Engineering, **36**, 137–141. [https://doi.org/10.18720/MPM.3612018\\_15](https://doi.org/10.18720/MPM.3612018_15).
- 27 Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N. and Serdjuks, D.O. (2020) Calculation of Deformations of a Cantilever-Frame Planar Truss Model with an Arbitrary Number of Panels. *Vestnik MGSU*, **4**, 510–517. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.4.510-517>.