



Research Article

Received: March 11, 2023

Accepted: April 9, 2023

ISSN 2658-5553
Published: April 16, 2023

Kinematic analysis, spectrum of natural frequencies, and formula for the first frequency of a planar truss

Kirsanov, Mikhail Nikolaevich¹ Sun, Jia Xuan¹ ¹ Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation; c216@ya.ru (K.M.N.); SunT@mpei.ru (S.J. X.)

Keywords:

Truss; Natural oscillation frequency; Induction; Maple; Planar truss; Dunkerley method; Oscillation spectrum

Abstract:

The object of research is the statically determinate regular symmetrical rectangular beam truss with a double lattice fixed on two supports. The lower chord of the structure is curvilinear, with a rise in the middle of the span. The mass of the lattice is distributed over its nodes. **Method.** A kinematic analysis reveals the variability of the lattice for a certain number of panels. In this case, an algorithm for searching for the distribution of virtual velocities of lattice nodes is described. Using the Maple computer mathematics system, a formula is derived for the dependence of the lower estimate of the first frequency of natural oscillations of the structure on the number of panels from the range of acceptable values. **The result** agrees with the numerical calculation considering all degrees of freedom of the structure. It is shown that with an increase in the number of panels, the accuracy of the analytical solution increases. Spectral constants are found in the frequency spectrum of a family of regular trusses.

1 Введение / Introduction

Для расчета напряженно-деформированного состояния и частотных характеристик строительных конструкций чаще всего используется метод конечных элементов, реализованный в различных программных продуктах. В [1] обсуждается разработка метода конечных элементов для фермы. Рассмотренный авторами элемент широко известен как элемент фермы или стержневой элемент. Такой подход применим для анализа скелетного типа стержневых конструктивных систем как в двумерных плоскостях, так и в трехмерном пространстве. Для изучения механизма разрушения стальных арочных стержневых конструкций, находящихся в сейсмических зонах, в [2] была проведена серия испытаний на вибростенде. Кроме того, с помощью метода конечных элементов было оценено влияние форм крепления на разрушение конструкции и воздействие повреждений на внутренние силы элемента. Результаты численной модели сравниваются с экспериментальными измерениями с точки зрения смещения, ускорения, деформации стали и коэффициента усиления структурной модели. Сравнение показывает, что численные результаты хорошо согласуются с экспериментальными измерениями. В [3] исследуются модальные эксперименты вибрации и модальные взаимодействия для большого развертываемого в космосе каркаса антенны кольцевого вида. Представлена уменьшенная модель фермы антенны. Разработан и изготовлен экспериментальный макет конструкции. Экспериментальные измерения мод колебаний выполнены для модели кольцевой фермы в уменьшенном масштабе. Получены собственные частоты и соответствующие им модальные формы. Найдены и проанализированы смещения точек соединения при различных частотах возбуждения.

Kirsanov, M.; Sun J.

Kinematic analysis, spectrum of natural frequencies, and formula for the first frequency of a planar truss 2023; *AlfaBuild*; 27 Article No 2703. doi: 10.57728/ALF.27.3



Аналитические решения задач о деформациях и колебаниях ферменных конструкций, как правило, относятся к плоским регулярным фермам [4], [5]. В таких решениях наибольшую трудность вызывает обобщение серии отдельных решений для ферм различного порядка на общий случай. Регулярными фермами, их классификацией и оптимизацией занимался А. Kaveh [6], [7]. Проблемы существования и анализа регулярных статически определимых стержневых конструкций ставились в [8], [9]. Отдельные решения для плоских ферм методом индукции получены в [10], [11], для арочных ферм получены в [12], [13]. Формулы для первой частоты собственных колебаний плоских ферм методом индукции в приближении Донкерлея получены для произвольного числа панелей в [14], [15]. Расчет основной частоты колебаний пространственных ферм в системе Maple выполнен в [16], [17]. Решения в рядах по собственным функциям для строительных конструкций и их элементам с использованием возможностей Maple получены в [18], [19]. Варианты метода Донкерлея для расчета собственных частот систем с многими степенями свободы рассмотрены в [20], [21].

В настоящей работе рассматривается схема регулярной фермы, допускающая кинематическую изменяемость при определенном числе панелей. Выводится приближенная формула зависимости основной частоты колебаний фермы от числа панелей, анализируется спектр собственных частот конструкции.

2 Материалы и методы / Materials and Methods

2.1 Конструкция фермы и усилия в стержнях

Плоская статически определимая ферма (рис. 1) имеет n панелей в половине пролета. Средняя часть пролета имеет небольшой на $1/4$ высоты подъем в нижнем поясе. Всего ферма состоит из $N = 8n + 6$ упругих стержней одинакового сечения, включая три стержня, моделирующие подвижную и неподвижную опоры. Рассматриваются вертикальные колебания грузов в узлах конструкции. Число степеней свободы такой модели равно числу грузов $K = 4n + 3$. Напряженное состояние стержней фермы может быть рассчитано аналитически по программе в системе Maple [22]. В программу заложен метод вырезания узлов.

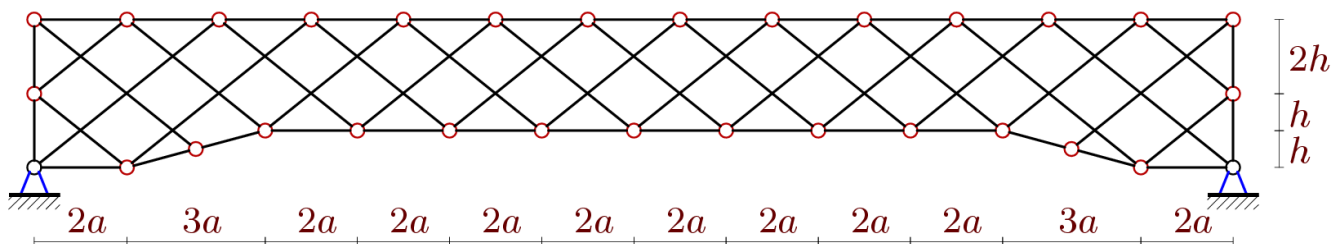


Рис. 1 – Схема фермы при $n=7$
Fig. 1 – Truss scheme for $n=7$

Координаты узлов и порядок соединения стержней вводятся в программу. Так же, как в дискретной математике, задаются ребра и вершины графа фермы. Нумерация узлов дана на рисунке 2. Фрагмент программы, который импортирует координаты в систему Maple, имеет вид:

```
m3=4*n+3+3;      L0:=2*a*(2*n-1);
x[1]:=0:y[1]:=0:  x[2]:=2*a:y[2]:=0:
x[3]:=7*a/2:y[3]:=h/2:
for i to 2*n-5 do x[i+3]:=2*(i-1)*a+5*a; y[i+3]:=h; od:
x[2*n-1]:=L0-7*a/2: y[2*n-1]:=h/2:
x[2*n]:=L0-2*a:    y[2*n]:=0:
x[2*n+1]:=L0:      y[2*n+1]:=0:
x[2*n+2]:=0:        y[2*n+2]:=2*h:
for i to 2*n do x[i+2*n+2]:=2*(i-1)*a; y[i+2*n+2]:=4*h:end:
x[4*n+3]:=L0:      y[4*n+3]:=2*h:
x[m3-2]:=0:        y[m3-2]:=-1:
x[m3-1]:=L0:       y[m3-1]:=-1:
x[m3]:=L0+1:       y[m3]:=0:
```



Вводится также специальный упорядоченный список номеров вершин концов соответствующих стержней. По этим данным и данным о нагрузке (номера загруженных узлов и величины сил) рассчитываются усилия в стержнях.

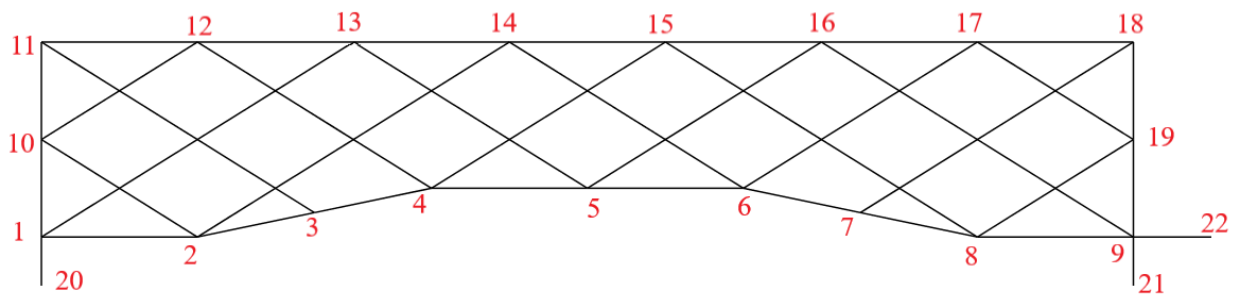


Рис. 2 – Нумерация узлов фермы при $n=4$
Fig. 2 – Truss node numbering for $n=4$

Пробный расчет усилий в стержнях показывает, что независимо от нагрузки при некоторых числах панелей определитель матрицы системы уравнений равновесия обращается в ноль. Известно, что это связано с кинематическим вырождением конструкции. Для подтверждения найденной особенности схемы в данном случае можно найти картину распределения возможных скоростей узлов, например, при $n=4$.

Основой кинематического алгоритма являются уравнения Эйлера, связывающие компоненты скоростей трех точек двухзвенника (рис. 3):

$$v_{xj} = v_{xi} - (y_j - y_i)\omega_1, v_{yj} = v_{yi} + (x_j - x_i)\omega_1.$$

$$v_{xk} = v_{xi} - (y_k - y_i)\omega_2, v_{yk} = v_{yi} + (x_k - x_i)\omega_2.$$

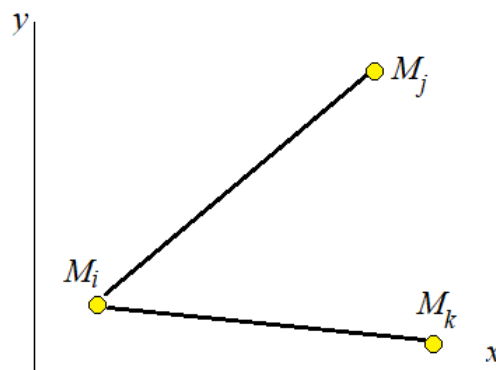


Рис. 3 – Схема двухзвенника для определения виртуальных скоростей узлов изменяемой фермы

Fig. 3 – Two-link scheme for determining the virtual velocities of the nodes of a variable truss

В системе уравнений заданы координаты узлов и компоненты скоростей точек M_j, M_k , а компоненты скорости точки M_i определяются. Алгоритм можно представить блок-схемой: $[k, l] \rightarrow [i, v_{xi}, v_{yi}]$. В сокращенной форме: $[k, l] \rightarrow i$. Применительно к рассматриваемой ферме при $n=4$ необходимо сначала задать угловую скорость произвольного звена, например звена 8–9, и вычислить компоненты скорости узла 4:

$$v_{x8} = -(y_8 - y_9)\omega = 0,$$

$$v_{y8} = (x_8 - x_9)\omega = -a\omega,$$

где ω — угловая скорость звена 8–9. Скорость опорного шарнира 9 равна нулю. Таким образом, образуется двухзвенник 8–9–19, для которого записывается блок-схема $[8, 9] \rightarrow 19$, откуда следует $[8, 9] \rightarrow [9, -3V, 0]$. Далее имеем следующую цепочку вычислений: $[17, 19] \rightarrow 18$, $[16, 9] \rightarrow 17$, $[15, 8] \rightarrow 16$, $[7, 8] \rightarrow 18$, $[6, 8] \rightarrow 17$, $[14, 6] \rightarrow 15$, $[5, 16] \rightarrow 6$, $[13, 5] \rightarrow 14$, $[4, 5] \rightarrow 15$, $[12, 4] \rightarrow 13$, $[3, 11] \rightarrow 4$, $[2, 3] \rightarrow 14$, $[1, 2] \rightarrow 13$, $[10, 2] \rightarrow 12$.

Распределение скоростей, подтверждающее мгновенную изменяемость фермы, имеет вид (рис. 4):

$$\begin{aligned}
 v_1 &= v_9 = 0, \\
 \bar{v}_2 &= [0, 3aU / h], \bar{v}_8 = [0, -3aU / h], \\
 \bar{v}_3 &= \bar{v}_7 = \bar{v}_{11} = \bar{v}_{18} = [U, 0], \\
 \bar{v}_4 &= [2U, -3aU / h], \bar{v}_6 = [2U, 3aU / h], \\
 \bar{v}_5 &= [2U, 0], \\
 \bar{v}_{10} &= \bar{v}_{19} = [-3U, 0], \\
 \bar{v}_{12} &= \bar{v}_{17} = [U, 4aU / h], \\
 \bar{v}_{13} &= [U, -aU / h], \bar{v}_{16} = [U, aU / h], \\
 \bar{v}_{14} &= [U, 2aU / h], \bar{v}_{15} = [U, -2aU / h].
 \end{aligned}$$

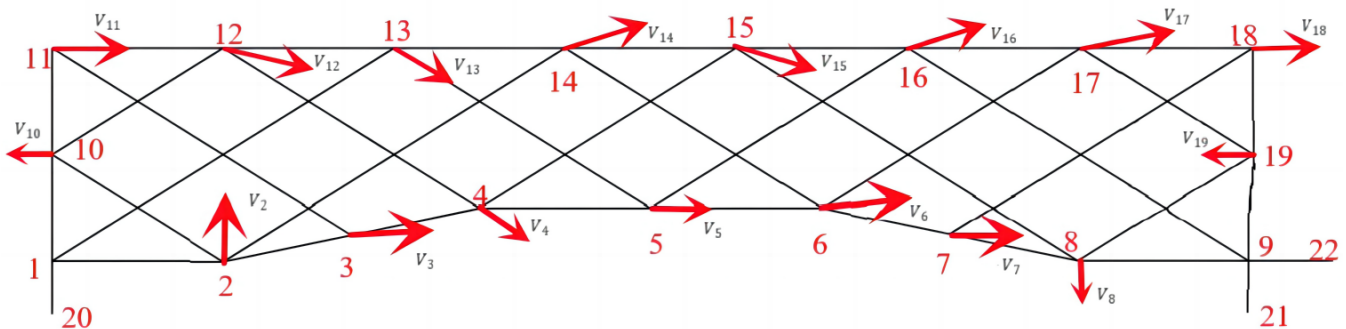


Рис. 4 – Возможные скорости мгновенно изменяемой фермы при $n=4$
 Fig. 4 – Possible velocities of an instantaneous truss with $n=4$

Дальнейший расчет будет произведен при допустимых значениях числа панелей: $n = (6k + (-1)^k + 7) / 4, k = 1, 2, \dots$. Эта функция не принимает значения, 4, 7, 10, 13, ..., при которых ферма изменяема.

3 Результаты и обсуждение / Results and Discussion

3.1 Первая частота собственных колебаний по методу Донкерлея

Первая частота собственных колебаний рассчитывается по методу Донкерлея. Инерционные свойства фермы моделируются массами, расположенными во всех $K = 4n + 3$ узлах фермы. Динамические уравнения в матричной форме записываются следующим образом:

$$mI_K \ddot{Y} + D_K Y = 0. \quad (1)$$

Здесь Y — это вектор вертикальных смещений масс в узлах фермы, \ddot{Y} — это вектор ускорений, I_K — это единичная матрица, D_K — это матрица жесткости. В случае гармонических колебаний с частотой ω справедлива связь $\ddot{Y} = -\omega^2 Y$. Матрицей, обратной к матрице жесткости D_K , является матрица податливости B_K . Элементы этой матрицы вычисляются с помощью формулы Максвелла – Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF). \quad (2)$$

Введены стандартные обозначения: $b_{i,j}$ — это перемещение узла i от действия единичной вертикальной безразмерной силы, приложенной к узлу j , $S_{\alpha}^{(i)}$ усилия в стержнях с номерами α от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу i , где расположена масса m , l_{α} — это длина стержня α , EF — это продольная жесткость, вычисляемая по значению площади



сечения и модулю упругости материала, принятая в данном случае для всех стержней одинаковой.

Если умножить слева уравнения (1) на матрицу податливости B_K , то задача сведется к проблеме собственных значений этой матрицы B_K : $B_K Y = \lambda Y$, где $\lambda = 1/(\omega^2 m)$ — это собственные числа матрицы B_K . Приближенное аналитическое решение для нижней оценки ω_D первой частоты ω_1 разыскивается по формуле Донкерлея:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}, \quad (3)$$

где ω_p — это парциальные частоты, рассчитанные для каждой отдельной массы.

Для расчета парциальных частот записываются уравнения движения отдельных масс:

$$m\ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (4)$$

Коэффициент жесткости D_p , обратный к коэффициенту податливости, также вычисляется по формуле Максвелла – Мора:

$$\delta_p = 1/D_p = \sum_{\alpha=1}^N (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF). \quad (5)$$

В такой постановке вычисляются только диагональные элементы матрицы B_K . Из формулы Донкерлея (3) следует выражение для первой частоты:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_k. \quad (6)$$

Расчет серии ферм с разным числом панелей показал, что коэффициент Δ_k имеет вид, не зависящий от параметра k :

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (1114768a^3 + 806977c^3 + 5327d^3 + 118840h^3) / (2592h^2 EF), \\ \Delta_3 &= (3281280a^3 + 1942361c^3 + 10432d^3 + 389112h^3) / (3872h^2 EF), \\ \Delta_4 &= (3704480a^3 + 1296865c^3 + 5747d^3 + 94552h^3) / (1440h^2 EF), \\ \Delta_5 &= 3(12473072a^3 + 3725631c^3 + 14325d^3 + 458088h^3) / (9248h^2 EF), \\ \Delta_6 &= (41866576a^3 + 8440315c^3 + 28061d^3 + 401448h^3) / (4704h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Свойство сохранения формы решения имеет место для регулярных конструкций. Решение задачи обобщения серии решений на общий случай записывается в виде:

$$\Delta_k = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3) / (h^2 EF).$$

Для нахождения общих элементов полученных последовательностей с помощью операторов системы Maple необходимо найти рекуррентные уравнения, которым они удовлетворяют. В рассматриваемой задаче потребовалось рассчитать двадцать семь ферм. Следует отметить, что символьные преобразования в Maple намного медленнее, чем численные. Время расчета собственных частот каждой следующей фермы примерно вдвое больше времени расчета предыдущей, с меньшим числом панелей. Решение однородных линейных рекуррентных уравнений методами Maple даёт выражения для определения коэффициентов в виде полиномов по числу k :

$$\begin{aligned} C_1 &= (576k^6 + 576((-1)^k + 5)k^5 + 40(60(-1)^k + 293)k^4 + 40(198(-1)^k + 443)k^3 + (9180(-1)^k + 14249)k^2 + \\ &+ (4699(-1)^k + 6900)k + 1020(-1)^k + 300) / (20(2n-1)^2), \end{aligned}$$

Kirsanov, M.; Sun J.

Kinematic analysis, spectrum of natural frequencies, and formula for the first frequency of a planar truss
2023; *AlfaBuild*; 27 Article No 2703. doi: 10.57728/ALF.27.3



$$C_2 = (21888k^4 + 192(64(-1)^k + 365)k^3 + 6(4940(-1)^k + 13827)k^2 + 2(11565(-1)^k + 22871)k + 6487(-1)^k + 10163) / (64(2n-1)^2),$$

$$C_3 = (576k^3 + 18(16(-1)^k + 45)k^2 + 2(135(-1)^k + 211)k + 65(-1)^k + 205) / (64(2n-1)^2),$$

$$C_4 = (64(19 - 8(-1)^k)k^3 + 2(1933 - 256(-1)^k)k^2 + 2(239(-1)^k + 1963)k + 489(-1)^k + 1365) / (8(2n-1)^2).$$

Окончательно аналитическая оценка нижней частоты по Донкерлею принимает следующий вид:

$$\omega_D^{-2} = m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3) / (h^2 EF). \quad (7)$$

3.2 Численное решение

Для иллюстрации найденной зависимости частоты собственных колебаний от количества панелей и для оценки точности аналитического решения нужно найти первую частоту из спектра частот собственных колебаний конструкции и сравнить ее с найденным аналитическим решением (7). Для нахождения собственных значений матрицы используется оператор Eigenvalues из пакета LinearAlgebra системы Maple. Рассматриваемая ферма имеет размеры $a = 1\text{м}$, $h = 1\text{м}$. Площадь поперечных сечений стержней решетки и опорных стержней принимается одинаковой: $F = 6\text{см}^2$. Длина вертикальных опорных стержней h , горизонтального (в правой опоре) — a . Модуль упругости стали $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, массы в узлах $m = 100$ кг. На рисунке 5 представлены кривые зависимости первой частоты ω_1 , полученной численно как низшая частота спектра, и ω_D по формуле (7).

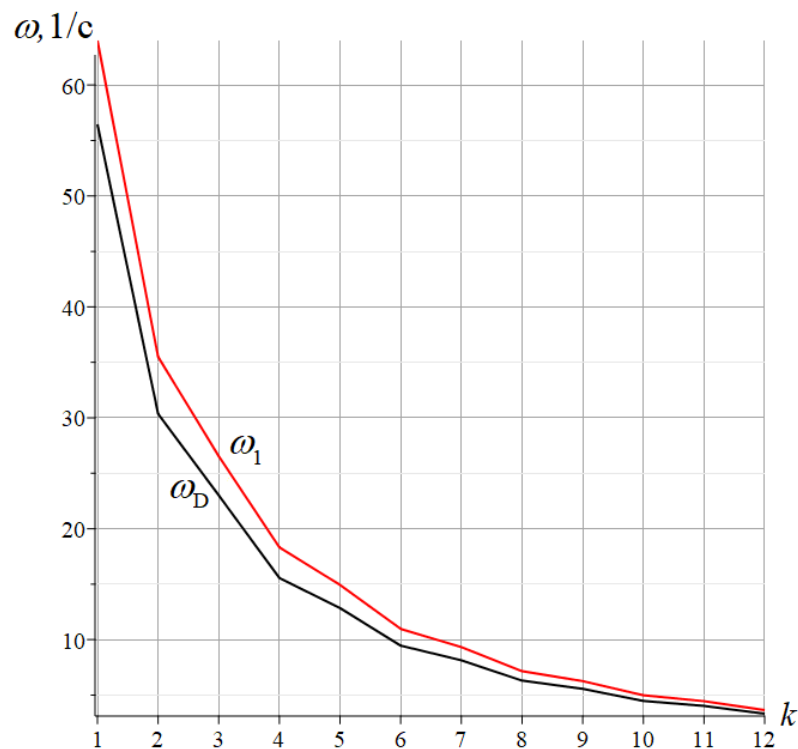


Рис. 5 — Зависимость частоты от числа панелей

Fig. 5 — Frequency dependence on the number of panels

По мере увеличения числа панелей увеличивается длина фермы и, как видно из графика, частота собственных колебаний монотонно уменьшается. Также видно, что ошибка аналитической оценки невелика и по мере увеличения числа панелей значительно уменьшается. Из этого можно сделать вывод, что полученное аналитическое решение наиболее всего подходит для расчета ферм с большим количеством панелей, где время вычислений

Kirsanov, M.; Sun J.

Kinematic analysis, spectrum of natural frequencies, and formula for the first frequency of a planar truss

2023; AlfaBuild; 27 Article No 2703. doi: 10.57728/ALF.27.3

увеличивается с увеличением числа панелей, а точность неизбежно снижается за счет эффекта накопления ошибок округлений. Изменение относительной погрешности $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$ в зависимости от количества панелей показано на рисунке 6. Точность аналитической оценки колеблется от 9% до 16%, что вполне приемлемо для приближенной аналитической оценки. Для разных высот фермы зависимость погрешности от числа панелей имеет явно выраженный скачкообразный характер. Объясняется это отчасти за счет немонотонного изменения реального числа панелей n от параметра k , выбранного так, что из рассмотрения выводится ряд чисел n , соответствующий кинематическому изменению конструкции. При этом погрешность полученной приближенной формулы для ферм с меньшей высотой с ростом числа панелей падает заметно быстрее.

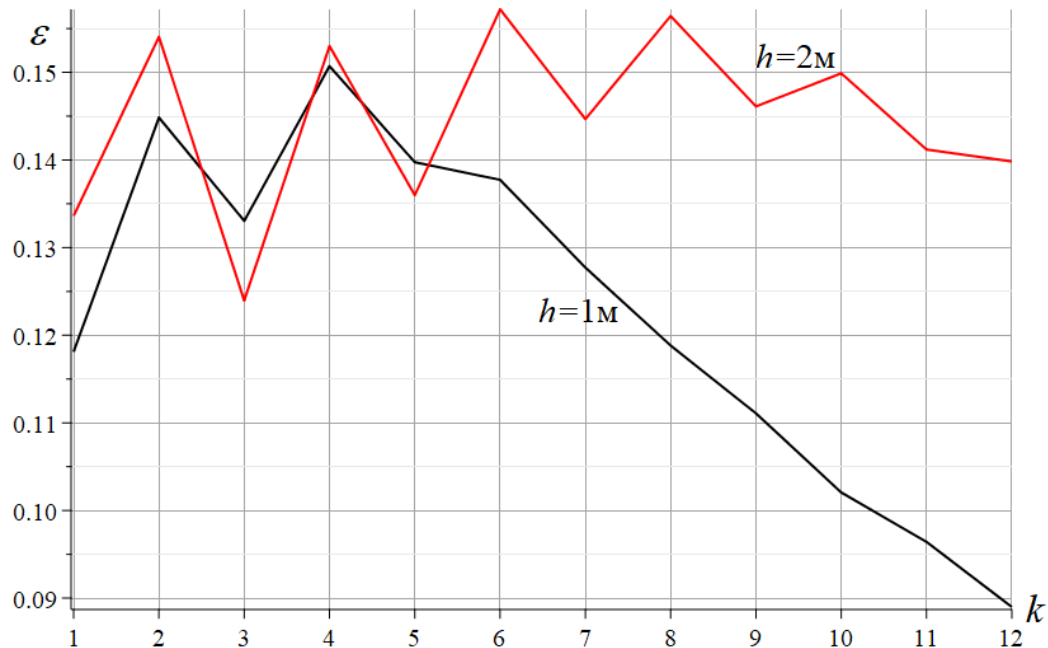


Рис. 6 – Погрешность оценки Донкерлея в зависимости от числа панелей
Fig. 6 – Dunkerley estimation error depending on the number of panels

Альтернативный метод получения аналитической оценки первой частоты основан на энергетическом методе Рэлея [4]. Этот метод дает существенно большую точность и оценивает частоту сверху, однако итоговая формула получается громоздкой.

3.3 Спектры регулярных ферм

На рисунке 7 размещены спектры регулярных ферм с числом $k=1,2,\dots,16$, определяющим порядок фермы. Здесь можно обнаружить некоторые закономерности. Точки на кривых означают частоты в спектре. Каждой ферме соответствует кривая спектра. На оси абсцисс j соответствует номеру собственной частоты в спектре. Обнаруживаются характерные горизонтальные прямые, соединяющие точки на кривых спектров разных порядков. В данной задаче наиболее четко видны три такие прямые — спектральные константы. Несмотря на то, что частоты колебаний весьма велики для задачи о колебании строительной конструкции, знание о таких закономерностях может быть полезно. В частности, при решении задачи о резонансе конструкции с каким-либо установленным на ней оборудованием (например, двигатель, имеющий высокие обороты) расчет высших частот для ферм большого порядка регулярности может быть существенно упрощен, если известен спектр этой же фермы низшего порядка.

Другая характерная черта семейства спектров — наличие верхней границы всех частот (прямая III). Вероятно, это наиболее важная особенность спектров, дающая возможность достаточно надежно прогнозировать частоты собственных колебаний ферм с большим числом панелей.

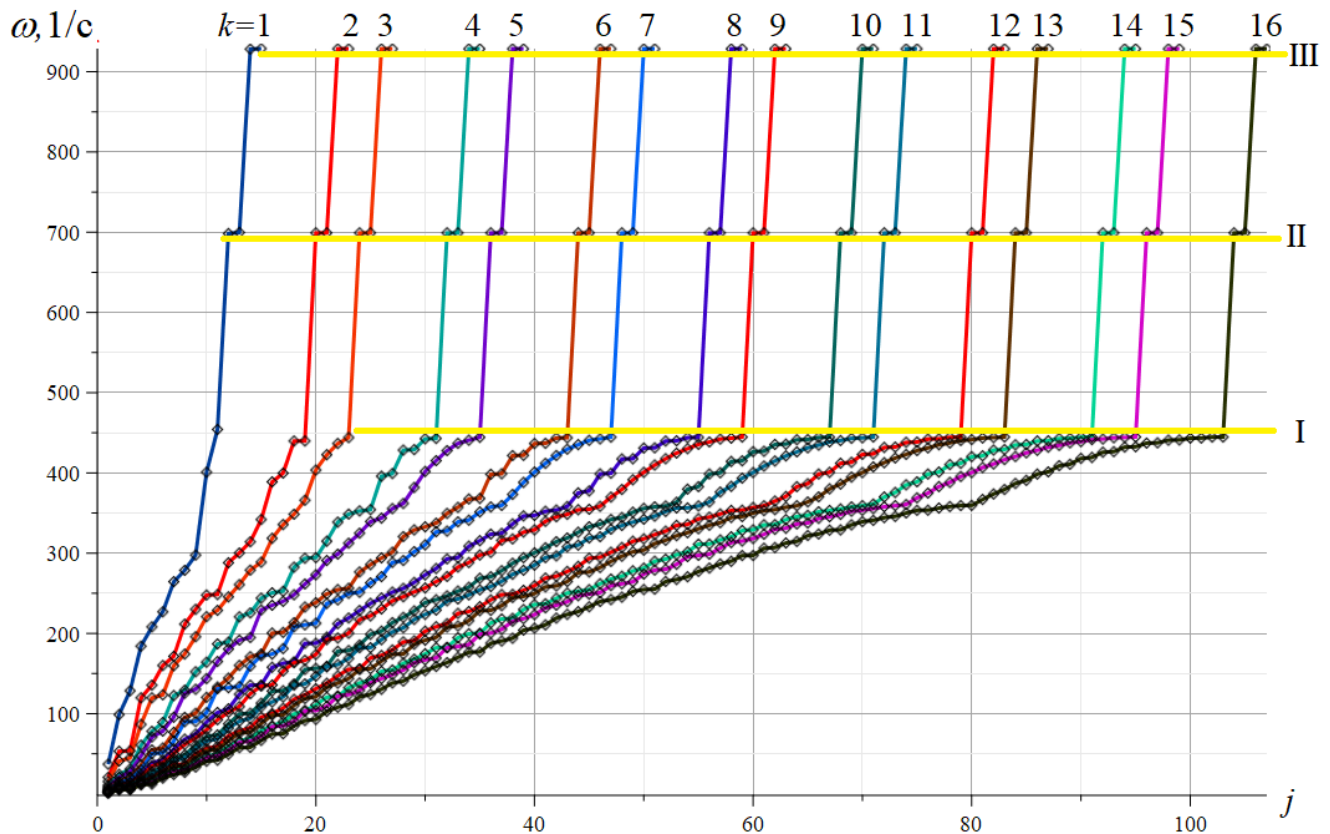


Рис. 7 – Спектры регулярных ферм. Все частоты, $k=1,2,\dots,16$
 Fig. 7 – Spectra of regular trusses. All frequencies, $k=1,2,\dots,16$

4 Выводы/ Conclusions

Рассмотрена схема статически определимой плоской решетчатой фермы. Замечены случаи кинематической изменяемости конструкции. Предложен кинематический алгоритм, выявляющий схемы соответствующих виртуальных скоростей узлов. Получена аналитическая зависимость собственной частоты колебаний от числа панелей. В спектрах частот ряда регулярных ферм с различным числом панелей обнаружены спектральные константы. Можно сделать следующие выводы:

1. Возможность кинематической изменяемости фермы подтверждается картиной виртуальных скоростей. Критические значения числа панелей исключаются из анализа.
2. Использованная оценка Донкерлея для первой частоты компактна, и обеспечивает приемлемую точность результата.
3. Спектры регулярных ферм имеют периодическую структуру и содержат спектральные константы.

5 Финансирование/Fundings

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

References

- 1 Liu, G.R. and Quek, S.S. (2014) FEM for Trusses. *The Finite Element Method*, Butterworth-Heinemann, 81–110. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-098356-1.00004-7>.
- 2 Han, Q.H., Xu, Y., Lu, Y., Xu, J. and Zhao, Q.H. (2015) Failure Mechanism of Steel Arch Trusses: Shaking Table Testing and FEM Analysis. *Engineering Structures*, Elsevier, **82**, 186–198. <https://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2014.10.013>.
- 3 Siriguleng, B., Zhang, W., Liu, T. and Liu, Y.Z. (2020) Vibration Modal Experiments and Modal Interactions of a Large Space Deployable Antenna with Carbon Fiber Material and Ring-Truss Structure. *Engineering Structures*, Elsevier Ltd, **207**, 109932.



- <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109932>.
- 4 Vorobev, O.V. (2020) Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **92**, 9204–9204. <https://doi.org/10.18720/CUBS.92.4>.
- 5 Rakhmatulina A R, Smirnova, A.A. (2018) Two-Parameter Derivation of the Formula. *Postulat*, **31**. <http://vuz.exponenta.ru/1/rsm.pdf>.
- 6 Kaveh, A., Rahami, H. and Shojaei, I. (2020) Swift Analysis of Civil Engineering Structures Using Graph Theory Methods. Springer International Publishing, Cham, **290**. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-45549-1>.
- 7 Kaveh, A., Hosseini, S.M. and Zaerza, A. (2020) Size, Layout, and Topology Optimization of Skeletal Structures Using Plasma Generation Optimization. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering 2020 45:2*, Springer, **45**, 513–543. <https://doi.org/10.1007/S40996-020-00527-1>.
- 8 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2005) Microarchitected Cellular Solids - The Hunt for Statically Determinate Periodic Trusses. *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, **85**, 607–617. <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>.
- 9 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2006) The Structural Performance of the Periodic Truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Pergamon, **54**, 756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>.
- 10 Arutyunyan, V.B. (2018) Calculation of the Deflection of a Statically Indeterminate Beam Truss. *Postulat*, **6**. <http://vuz.exponenta.ru/1/ar18.pdf>.
- 11 Belyankin, N.A.; Boyko, A.Y. (2019) Formula for Deflection of a Girder with an Arbitrary Number of Panels under the Uniform Load. *Structural Mechanics and Structures*, **1**, 21–29. https://www.elibrary.ru/download/elibrary_37105069_21945931.pdf.
- 12 Kazmiruk, I.Y. (2016) On the Arch Truss Deformation under the Action of Lateral Load. *Science Almanac*, **17**, 75–78. <https://doi.org/10.17117/na.2016.03.03.075>.
- 13 Voropay, R., Domanov, E. (2019) Analytical Solution of the Problem of Shifting a Movable Support of a Truss of Arch Type in the Maple System. *Postulat*, **1**. <http://vuz.exponenta.ru/1/vd.pdf>.
- 14 Ovsyannikova, V.M. (2020) Dependence of Deformations of a Trapezoidal Truss Beam on the Number of Panels. *Structural Mechanics and Structures*, **26**, 13–20. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44110286>.
- 15 Kirsanov, M.N., Safronov, V.S. (2022) Analytical Estimation of the First Natural Frequency and Analysis of a Planar Regular Truss Oscillation Spectrum. *Magazine of Civil Engineering*, **111**. <https://doi.org/10.34910/MCE.111.14>.
- 16 Kirsanov, M. (2023) Model of a Hexagonal Prismatic Truss. Oscillation Frequency Spectrum. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **106**, 10601. <https://doi.org/10.4123/CUBS.106.01>.
- 17 Kirsanov, M.N. (2022) Trihedral Rod Pyramid: Deformations and Natural Vibration Frequencies. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **105**, 10401–10401. <https://doi.org/10.4123/CUBS.104.1>.
- 18 Goloskokov, D.P. and Matrosov, A. V. (2018) Approximate Analytical Solutions in the Analysis of Thin Elastic Plates. AIP Conference Proceedings, American Institute of Physics Inc. <https://doi.org/10.1063/1.5034687>.
- 19 Galileev, S.M. and Matrosov, A. V. (1997) Method of Initial Functions: Stable Algorithms in the Analysis of Thick Laminated Composite Structures. *Composite Structures*, Elsevier BV, **39**, 255–262. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(97\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(97)00108-6).
- 20 Low, K.H. (2000) A Modified Dunkerley Formula for Eigenfrequencies of Beams Carrying Concentrated Masses. *International Journal of Mechanical Sciences*, Pergamon, **42**, 1287–1305. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00049-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00049-1).
- 21 Rutenberg, A. (1976) A Lower Bound for Dunkerley's Formula in Continuous Elastic Systems. *Journal of Sound and Vibration*, Academic Press, **45**, 249–252. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(76\)90599-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(76)90599-X).
- 22 Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N. and Serdjus, D.O. (2020) Calculation of Deformations of a Cantilever-Frame Planar Truss Model with an Arbitrary Number of Panels. *Vestnik MGSU*, **4**, 510–517. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.4.510-517>.