Research Article ISSN 2304-6295

Received: March 1, 2023 *Accepted: March 29, 2023* *Published: April 6, 2023*

Analytical dependence of the natural oscillation frequency of the planar truss on the number of panels

Kirsanov, Mikhail Nikolaevich[1]
Dai, Qiao[2]
[1,2] Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation
Correspondence: [1]email c216@ya.ru; contact phone +7(965)-183-35-34,

[2]email 228441531@qq.com; contact phone +7(919)-990-97-59.

Keywords:

Truss; Dunkerley method; Rayleigh method; Fundamental frequency; Induction; Maple; Mass redistribution

Abstract:

The object of the study is a regular statically determinate beam-type planar truss with double supports and a rise in the middle of the span. The truss lattice is triangular. The stiffness of all truss rods is assumed to be the same. **Method.** The problem of the lower limit of the fundamental frequency of natural oscillations is solved in analytical form for an arbitrary number of panels. It is assumed that the truss mass is located at the nodes of the truss. The solution of the problem was found in the Maple computer mathematical system using the induction method. The forces in the rods are determined by the method of cutting nodes. The stiffness of the structure is calculated by the Maxwell-Mohr formula. **Results**. Formulas are obtained for the boundaries of the fundamental frequency of a type polynomial in the number of panels. A distinctive feature of the obtained solution compared to similar solutions using the Dunkerley and Rayleigh estimates is its high accuracy. It is shown that the redistribution of masses along the truss belts little changes the value of the first frequency.

1 Введение / Introduction

Плоская модель ферменной конструкции наиболее распространена в инженерной практике. Расчет деформаций и частотных характеристик чаще всего производится в инженерных пакетах, основанных на методе конечных элементов. В [1] с помощью метода конечных элементов изучены механизмы разрушения стальных арочных ферм. В [2] усилия в ферме, найденные численно, проверяются экспериментально. Расчет повреждений арочных ферм с использованием метода конечных элементов применительно к явлению землетрясений выполнен в [3]. Задача оптимизации ферм с применением численных расчетов и элементов теории графов рассмотрена в [4]. Основы теории расчета плоских и пространственных ферм методом конечных элементов даны в [5]. В случае статически определимых конструкций возможны и аналитические методы решения [6]–[8]. Особенно это относится к регулярным фермам, содержащим в своей структуре периодические группы стержней, например, панели [9]. Для таких ферм, существование которых впервые изучали Hutchinson R.G. и Fleck N.A. [10],

[11], аналитические методы с использованием метода индукции могут дать зависимость решения от числа панелей (порядка фермы). Это существенно расширяет область применения аналитического решения и позволяет получить общую картину изменения расчетных параметров при изменении порядка фермы. Аналитические решения для оценки первой частоты регулярной пространственной консоли получены в [12], конструкции пространственного покрытия в [13]. В [14] найдено аналитическое решение для шестигранной призматической башни, в [15] — для плоской шпренгельной фермы. Прогиб составной пространственной рамы в зависимости от числа панелей при различных нагрузках получен в виде компактной формулы в [16]. Двухсторонняя оценка первой частоты колебаний плоской консольной фермы треугольного очертания найдена в [17] для произвольного числа панелей. Формула зависимости первой частоты колебаний двухпролетной плоской фермы от числа панелей выведена в [18]. Справочник [19] содержит около 70 различных схем плоских статически определимых регулярных ферм и расчетные формулы для усилий и прогибов. Отдельные аналитические решения для прогибов плоских ферм получены в [20], [21]. Формула для прогиба шпренгельной фермы с произвольным числом панелей методом индукции найдена в [22]. Аналитические решения с использованием разложений в ряды получены в [23], [24] с применением системы Maple для некоторых пространственных элементов строительных конструкций. Заметный вклад в теорию регулярных стержневых систем и их оптимизацию внес Kaveh A. [25], [26]. Расчет ферм с учетом геометрической нелинейности выполнен в [27]. В [28] на основе метода Рэлея предложен упрощенный аналитический метод для оценки первой частоты колебаний фермы.

В настоящей работе предлагается схема статически определимой плоской фермы, и различными методами выводятся формулы зависимости первой частоты от числа панелей.

2 Материалы и методы / Materials and Methods

2.1 Модель фермы

Ферма (рис. 1) с *n* панелями в половине пролета имеет высоту 2*h* и длину пролета $L_0 = 4a(n-1)$. Верхний пояс фермы прямолинейный, нижний имеет подъем в средней части. Особенность рассматриваемой конструкции — спаренные опоры и подъем в средней ее части. Ферма состоит из $\eta = 8n+2$ стержней, считая пять стержней, моделирующие три подвижные и одну неподвижную опоры. Рассматриваются только вертикальные колебания грузов в узлах конструкции. Число степеней свободы в такой постановке равно числу грузов *N* = 4*n*+1. Напряженное состояние стержней фермы может быть рассчитано аналитически по программе в системе Maple [6]–[9] . В программу заложен метод вырезания узлов.

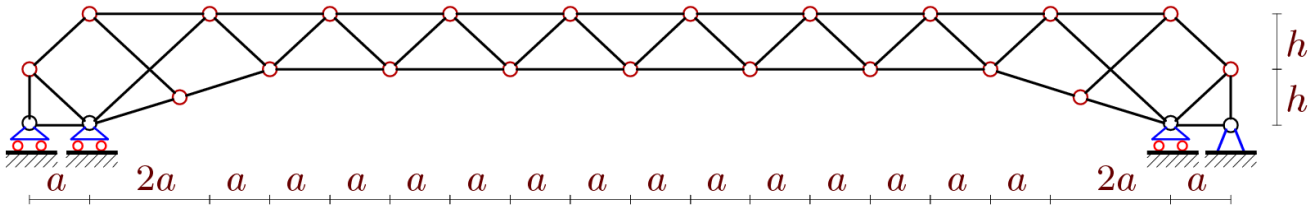

Рис. 1. Схема , *n=6*
Fig. 1. Truss, *n=6*

Для расчета силы в стержнях используется программа, написанная в системе компьютерной математики Maple. Альтернативный вариант — система Mathematica [29]. Координаты узлов и порядок соединения стержней вводятся в программу также, как в дискретной математике задаются ребра и вершины графа. Нумерация стержней и узлов дана на рисунке 2. Задается специальный упорядоченный список номеров вершин концов

соответствующих стержней. Фрагмент программы, который вводит координаты в систему Maple, имеет вид:

```
> m3:= 4*n+6: # число узлов
> L0:=4*a*(n-1);
 > x[1]:=0:y[1]:=0:x[2]:=a:y[2]:=0:x[3]:=5*a/2:y[3]:=h/2:
 > for i to 2*n-5 do x[i+3]:=2*(i-1)*a+4*a; y[i+3]:=h; od:
 > x[2*n-1]:=L0-5*a/2: y[2*n-1]:=h/2:
 > x[2*n]:=L0-a:  y[2*n]:=0:
 > x[2*n+1]:=L0:  y[2*n+1]:=0:
 > x[2*n+2]:=0:  y[2*n+2]:=h:
 > for i to 2*n-2 do x[i+2*n+2]:=2*(i-1)*a+a: y[i+2*n+2]:=2*h:end:
 > x[4*n+1]:=L0: y[4*n+1]:=h:
 > x[m3-4]:=0:  y[m3-4]:=-h:
 > x[m3-3]:=a:  y[m3-3]:=-h:
 > x[m3-2]:=x[2*n]: y[m3-2]:=-h: x[m3-1]:=L0:  y[m3-1]:=-h: x[m3]:=L0+a: y[m3]:=0:
```

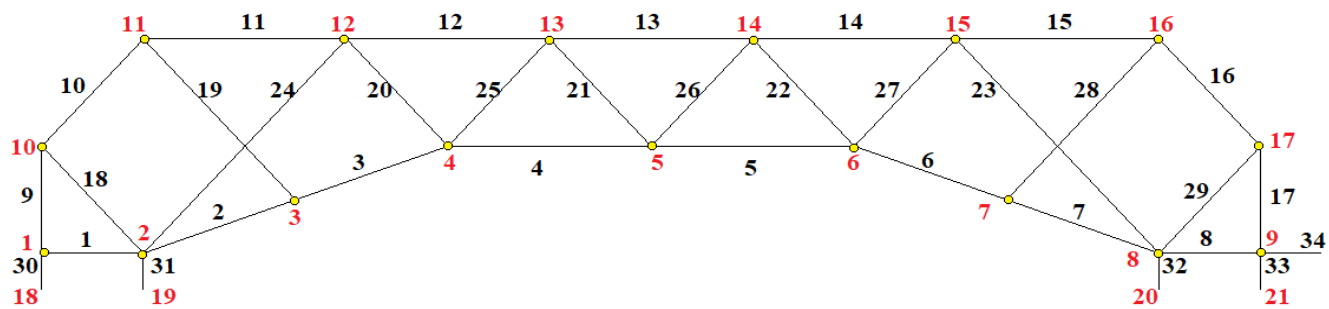

Рис. 2 – Нумерация стержней и узлов фермы, n=4
Fig. 2– Numbering of truss elements and node, n=4

2.2 Расчет частоты колебаний системы с *N* степенями свободы

Уравнения вертикальных колебаний грузов имеют вид:

$$J_N \ddot{Y} + D_N Y = 0, \tag{1}$$

где D_N – матрица жесткости, $Y = [y_1, y_2, ..., y_N]^T$ – вектор вертикальных смещений грузов, $J_N = mI_N$ – диагональная матрица инерции системы с одинаковыми массами, I_N – единичная матрица, $\ddot{Y}$ — вектор ускорений узлов с массами. Обратной к матрице жесткости D_N является матрица податливости B_N, элементы которой вычисляются с помощью интеграла Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{\eta-5} S_k^{(i)} S_k^{(j)} l_k / (EF). \tag{2}$$

Здесь $S_k^{(i)}$ — усилие в стержне k от действия единичной вертикальной силы в узле *i*, l_k — длина стержня с номером *k*, *E* модуль упругости материала стержней, *F* — площадь поперечного сечения стержней. Жесткости стержней предполагаются одинаковыми. Пять стержней опор не деформируются. В сумму (2) усилия этих стержней не входят.

2.3 Метод Донкерлея

Приближенное решение по методу Донкерлея [30] для нижней оценки первой частоты колебаний ω_D выражается через частоты колебаний отдельных грузов в узлах:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{k=1}^{N} \omega_k^{-2}, \tag{3}$$

где ω_k — парциальная частота колебаний массы m. В случае колебаний одной массы при вычислении парциальной частоты уравнение (1) имеет скалярный вид: $m\ddot{y}_k + d_k y_k = 0$, где d_k – коэффициент жесткости, y_k – смещение массы, $\ddot{y}_k$ – ускорение. Отсюда частота колебаний одного груза (парциальная частота) разыскивается по формуле: $\omega_k = \sqrt{d_k / m}$. Коэффициент жесткости вычисляется с помощью интеграла Мора: $\delta_k = 1/d_k = \sum_{j=1}^{\eta-5} \left(\tilde{S}_j^{(k)}\right)^2 l_j / (EF)$. Здесь обозначено: $\tilde{S}_j^{(k)}$ — усилия в стержне с номером *j* от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу, где расположена масса с номером *k*. Из (3) следует:

$$\omega_D^{-2} = m\sum_{k=1}^{N} \delta_k = m\Delta_n. \tag{4}$$

Общий вид решения для коэффициента Δ_n:

$$\Delta_n = (C_{1,n}a^3 + C_{2,n}c^3 + C_{3,n}d^3 + C_{4,n}h^3)/(h^2EF) \tag{5}$$

Решая последовательно задачу для *n*=3,4,5 ..., получаем:

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &= (161d^3 + 5888h^3 + 4968a^3 + 3123c^3)/144/(h^2EF),\\
\Delta_4 &= (753d^3 + 16592h^3 + 103560a^3 + 15935c^3)/400/(h^2EF),\\
\Delta_5 &= \left(34016h^3 + 727144a^3 + 2057d^3 + 51155c^3\right)/784/\left(h^2EF\right),\\
\Delta_6 &= \left(6576h^3 + 352456a^3 + 481d^3 + 6576c^3\right)/144/\left(h^2EF\right),\\
\Delta_7 &= \left(93120h^3 + 10385512a^3 + 93120d^3 + 257427c^3\right)/1936/\left(h^2EF\right),...
\end{aligned}$$

Используя оператор **rgf_findrecur** из специального пакета **genfunc** системы Maple, можно вывести рекуррентные уравнения для элементов последовательностей. Для коэффициента C_1 получается линейное уравнение пятого порядка:

$$C_{1,n} = 5C_{1,n-1} - 10C_{1,n-2} + 10C_{1,n-3} - 5C_{1,n-4} + C_{1,n-5}.$$

Оператор **rsolve** дает решение этого уравнения:

$$C_1 = (1024n^6 - 9216n^5 + 34720n^4 - 59520n^3 + 11236n^2 + 102576n - 102915)/90/(2n-3)^2 \tag{6}$$

Аналогично находятся и другие коэффициенты:

$$\begin{aligned}
C_2 &= (512n^4 - 1152n^3 - 2228n^2 + 7056n - 2115)/48/(2n-3)^2,\\
C_3 &= (128n^3 - 468n^2 + 316n + 291)/48/(2n-3)^2.\\
C_4 &= (32n^3 + 246n^2 - 899n + 723)/3/(2n-3)^2.
\end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда и из (4), (5) следует итоговая формула для нижней границы первой собственной частоты колебаний фермы по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = m(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3d^3 + C_4h^3)/(h^2EF). \tag{8}$$

Другой метод получения аналитической оценки низшей частоты основан на методе Рэлея [7-10]. Этот метод дает большую точность и оценивает частоту сверху.

2.4 Метод Рэлея

Метод Релея основан на законе сохранения энергии. В каждом цикле гармонических колебаний происходит переход энергии деформации из потенциальной в кинетическую и наоборот. Имеет место равенство:

$$T_{\max} = \Pi_{\max} \tag{9}$$

Отсюда следует формула Рэлея для верхней оценки первой частоты. Кинетическая энергия системы всех масс m, расположенных в узлах структуры, имеет вид:

$$T = \sum_{i=1}^{N} m v_i^2 / 2.$$

Вертикальная скорость массы i имеет вид: $v_i = \dot{y}_i = \omega u_i \cos(\omega t + \varphi_0)$. Предполагая, что при максимальной кинетической энергии $\max(\cos(\omega t + \varphi_0)) = 1$, имеем:

$$T_{\max} = \omega^2 m \sum_{i=1}^{N} u_i^2 / 2, \tag{10}$$

где амплитуда вертикального смещения вычисляется по формуле Максвелла-Мора:

$$u_i = \sum_{\alpha=1}^{\eta-5} S_\alpha^{(P)} \tilde{S}_\alpha^{(i)} l_\alpha / (EF) = P \sum_{\alpha=1}^{\eta-5} \tilde{S}_\alpha^{(P)} \tilde{S}_\alpha^{(i)} l_\alpha / (EF) = P \tilde{u}_i \tag{11}$$

Используются предыдущие обозначения: $S_\alpha^{(P)}$ — усилие в стержне $\alpha = 1, ..., \eta - 5$ от действия нагрузки P, равномерно распределенные по узлам, $\tilde{S}_\alpha^{(i)}$ — сила в одном и том же стержне от одной (безразмерной) нагрузки, приложенной к массе с числом i, $\tilde{S}_\alpha^{(P)} = S_\alpha^{(P)} / P$. Форма колебаний системы нагрузок с первой частотой близка к форме прогиба конструкции от равномерной нагрузки. Таким образом, (10) принимает вид:

$$T_{\max} = P^2 \omega^2 \sum_{i=1}^{N} m \tilde{u}_i^2 / 2, \tag{12}$$

где $\tilde{u}_i = u_i / P = \sum_{\alpha=1}^{\eta-5} \tilde{S}_\alpha^{(P)} \tilde{S}_\alpha^{(i)} l_\alpha / (EF)$ — амплитуда перемещений массы с числом i под действием распределенной нагрузки, отнесенной к значению P.

Потенциальная энергия деформации упругих стержней записывается в виде суммы:

$$\Pi_{\max} = \sum_{\alpha=1}^{\eta-5} S_\alpha^{(P)} \Delta l_\alpha / 2 = \sum_{\alpha=1}^{\eta-5} (S_\alpha^{(P)})^2 l_\alpha / (2EF). \tag{13}$$

Из-за линейности задачи по нагрузке: $S_\alpha^{(P)} = P \sum_{i=1}^{N} \tilde{S}_\alpha^{(i)}$. Отсюда следует:

$$\Pi_{\max} = P^2 \sum_{\alpha=1}^{\eta-5} \tilde{S}_\alpha^{(P)} \sum_{i=1}^{N} \tilde{S}_\alpha^{(i)} l_\alpha / (2EF) = P^2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha}^{\eta-5} \tilde{S}_\alpha^{(P)} \tilde{S}_\alpha^{(i)} l_\alpha / (2EF) = P^2 \sum_{i=1}^{N} \tilde{u}_i / 2. \tag{14}$$

Из (9), (12), (14) выводится формула Рэлея для верхней оценки первой частоты колебаний фермы:

$$\omega_R^2 = \sum_{i=1}^{N} \tilde{u}_i / \sum_{i=1}^{N} m \tilde{u}_i^2. \tag{15}$$

Обобщение ряда решений для перемещения $\tilde{u}_i$ в различных n дает зависимость частоты от порядка построения n. Рассмотрим отдельно суммы $\sum_{i=1}^{N}\tilde{u}_i$ и $\sum_{i=1}^{N}\tilde{u}_i^2$.

Расчет смещения для ферм с разным количеством панелей показывает, что решение для сумм $\sum_{i=1}^{N}\tilde{u}_i$ в числителе (15) имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{N}\tilde{u}_i = (C_a a^3 + C_c c^3 + C_d d^3 + C_h h^3)/(h^2 EF), \tag{16}$$

или в более компактной форме:

$$\sum_{i=1}^{N}\tilde{u}_i = \sum_{\alpha=[a,c,d,h]} mC_\alpha \alpha^3/(h^2 EF), \tag{17}$$

где коэффициенты C_a, C_c, C_d, C_h получены методом индукции:

$$\begin{aligned}
&n=3,\ \sum_{i=1}^{N}\tilde{u}_i = (2712a^3 + 1207c^3 + 113d^3 + 648h^3)/16/(h^2 EF),\\
&n=4,\ \sum_{i=1}^{N}\tilde{u}_i = (38952a^3 + 3975c^3 + 265d^3 + 648h^3)/16/(h^2 EF),\\
&n=5,\ \sum_{i=1}^{N}\tilde{u}_i = (185272a^3 + 8983c^3 + 481d^3 + 648h^3)/16/(h^2 EF),\\
&n=6,\ \sum_{i=1}^{N}\tilde{u}_i = (601416a^3 + 16743c^3 + 761d^3 + 648h^3)/16/(h^2 EF),\ldots
\end{aligned} \tag{18}$$

В результате коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned}
&C_a = (512n^5 - 3840n^4 + 14080n^3 - 31200n^2 + 37518n - 20205)/30,\\
&C_c = (256n^3 + 288n^2 - 3184n + 3669)/48,\\
&C_d = (32n^2 - 72n + 41)/16,\\
&C_h = 81/2.
\end{aligned} \tag{19}$$

Знаменатель (17) имеет более сложную форму:

$$\sum_{k=1}^{N} m\tilde{u}_k^2 = \sum_{\alpha,\beta=[a,c,d,h]} mC_{\alpha\beta}\alpha^3\beta^3/(h^4 E^2 F^2), \tag{20}$$

где

$$
\begin{aligned}
C_{aa} &= (1015808n^9 - 13713408n^8 + 87398400n^7 - 341720064n^6 + 890429568n^5 - 158812819 \\
&\quad + 1902898120n^3 - 1386894276n^2 + 431505594n + 76031865)/11340, \\
C_{cc} &= (65536n^5 + 122880n^4 - 606720n^3 - 3015360n^2 + 10907504n - 8631945)/7680, \\
C_{dd} &= (256n^3 - 824n^2 + 892n - 325)/2566, \\
C_{hh} &= 2349/8, \\
C_{ac} &= (696320n^7 - 4085760n^6 + 4981760n^5 + 28425600n^4 - 147530320n^3 + 313453560n^2 - \\
&\quad - 326796885n + 131244750)/12600, \\
C_{ad} &= (4096n^6 - 35328n^5 + 149120n^4 - 386880n^3 + 603864n^2 - 526542n + 194805)/240, \\
C_{ah} &= 816n^3 - 3672n^2 + 6069n - 5580, \\
C_{ch} &= (11016n - 14391)/32, \\
C_{cd} &= (2048n^4 - 26768n^2 + 54858n - 31167)/384, \\
C_{dh} &= (558n - 621)/16.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Таким образом, верхняя оценка первой частоты фермы, в зависимости от количества панелей, может быть получена по формуле:

$$
\omega_R = h\sqrt{\frac{EF \sum\limits_{\alpha=[a,c,d,h]} C_\alpha \alpha^3}{m \sum\limits_{\alpha,\beta=[a,c,d,h]} C_{\alpha\beta}\alpha^3\beta^3}} \tag{22}
$$

с коэффициентами (19), (21), зависящими только от порядка регулярности n.

Формула (22) почти совпадает по форме с выражением (8), полученным методом Донкерлея. В формуле (8) искомые коэффициенты содержатся только в знаменателе.

2.5 Влияние распределения масс на первую частоту колебаний

В принятой модели фермы предполагается, что все массы одинаковы. Если предположить, что массы узлов в верхнем и нижнем поясах разные, то в уравнении (1) следует использовать матрицу инерции вида $J_N = m\tilde{I}_N$, где $\tilde{I}_N$ — диагональная матрица с элементами $\tilde{i}_{kk} = 1,\ k = 1,...,2n+1,$ (нижний пояс), $\tilde{i}_{kk} = f,\ k = 2n+1,...,N,$ (верхний пояс). Если масса в узлах нижнего пояса больше, чем в верхнем, то $f < 1$. Коэффициенты (6) и (7) в формуле Донкерлея (8) примут более сложный вид:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= (1024(f+1)n^6 - 9216(f+1)n^5 + 34720(f+1)n^4 - 1920(35f+31)n^3 + \\
&\quad + 4(14374f + 2809)n^2 + 48(152f + 2137)n - 45(2287 + 768f))/(90(2n-3)^2), \\
C_2 &= (256(f+1)n^4 - 576(f+1)n^3 - 4(244f + 313)n^2 + 168(19f + 23)n - \\
&\quad - 9(136f + 99))/(48(2n-3)^2), \\
C_3 &= (64(f+1)n^3 - 12(20f + 19)n^2 + 4(50f + 29)n + 3(24f + 73))/(48(2n-3)^2), \\
C_4 &= (16(f+1)n^3 + 6(30f + 11)n^2 - (622f + 277)n + 3(79 + 162f))/3/(2n-3)^2.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

3 Результаты и их обсуждение / Results and Discussion

Для нахождения собственных значений матрицы используется оператор *Eigenvalues* из пакета *LinearAlgebra* системы Maple. Рассматриваемая ферма имеет следующие размеры: $a = 3\text{м},\ h = 1\text{м}$. Площадь поперечных сечений стержней решетки и опорных стержней принимается одинаковой: $F = 9\,\text{см}^2$. Модуль упругости стали $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа, массы в узлах $m = 400\,\text{кг}$. На рисунке 3 представлены зависимость от количества панелей верхней оценки наименьшей частоты ω_R по формуле Рэлея (22), частоты ω_D по формуле Донкерлея (8) и значения первой частоты ω_1 спектра системы с N степенями свободы, найденная численно.

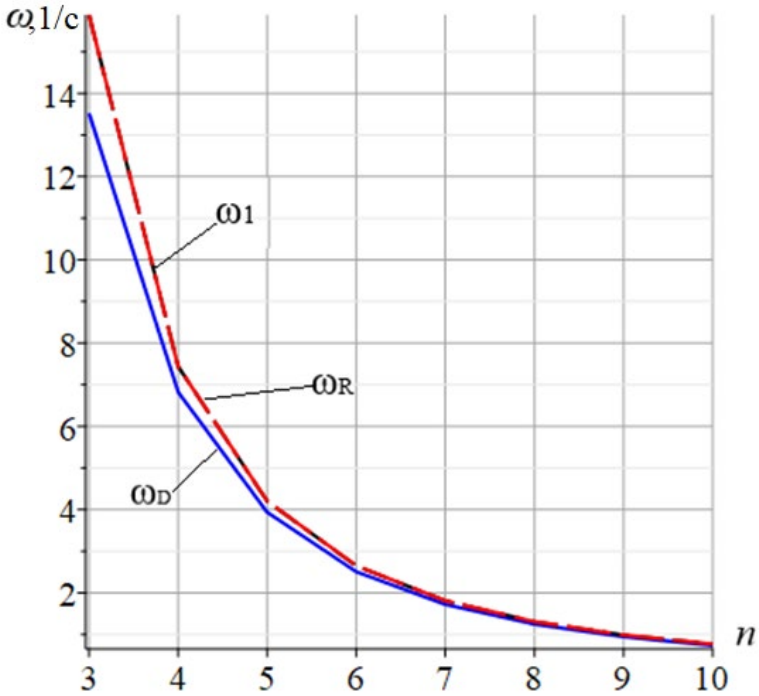

Рис. 3 – Зависимость от количества панелей первой частоты колебаний ω_R по методу Рэлея, частоты ω_D по методу Донкерлея и первой частоты ω_1 спектра, полученного численно.

Fig. 3 – Dependence on the number of panels of the first oscillation frequency ω_R according to the Rayleigh method, the frequency ω_D according to the Dunkerley method and the first frequency ω_1 of the spectrum.

Кривая зависимости первой собственной частоты колебаний фермы от числа панелей, полученной численно, и кривая частоты по методу Рэлея практически сливаются. Метод Донкерлея, как и предполагалось, дает оценку снизу.

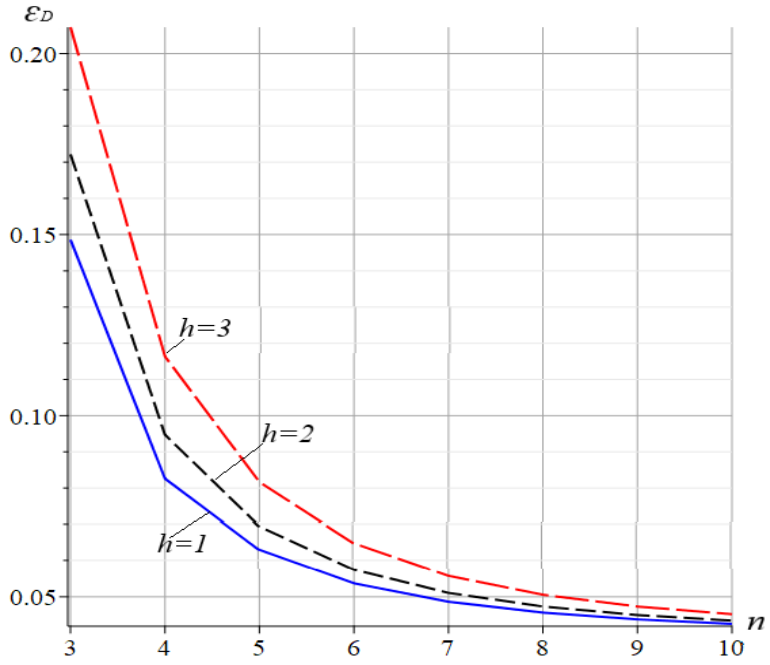

Рис. 4 – Относительная погрешность оценки частоты колебаний по Донкерлею ε_D.

Fig. 4 – Relative error in estimating the oscillation frequency ε_D according to Dunkerley

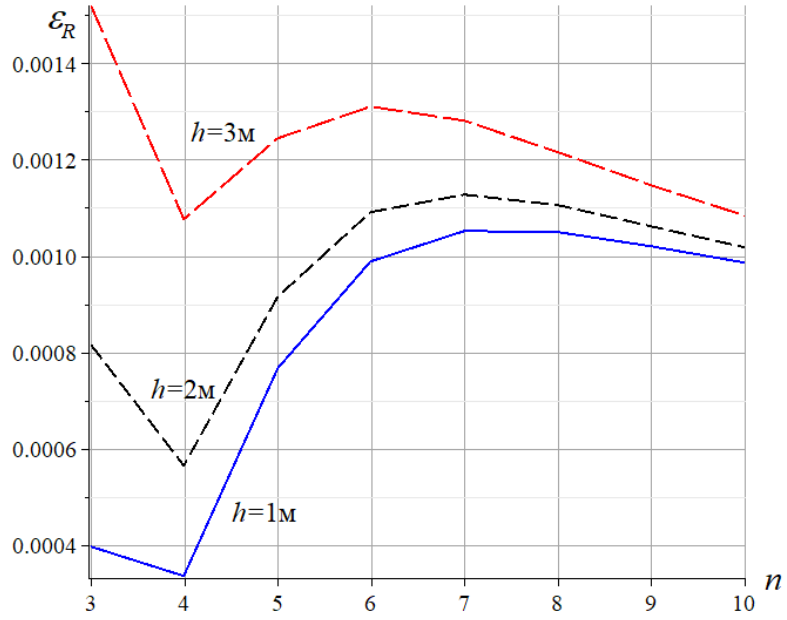

Рис. 5 – Относительная погрешность оценки частоты колебаний по Рэлею ε_R

Fig. 5 – Relative error in estimating the oscillation frequency according to Rayleigh ε_R

Ошибка собственной частоты, полученная методом Донкерлея, намного больше, чем погрешность метода Рэлея. Для уточнения величины оценки полученных приближений можно ввести значение относительной ошибки $\varepsilon_D = |\omega_D - \omega_1| / \omega_1$, $\varepsilon_R = |\omega_R - \omega_1| / \omega_1$. Из сравнения рисунков 4 и 5 видно, что точность метода Рэлея при любом числе панелей намного выше метода Донкерлея. При этом оба эти метода дают погрешность, уменьшающуюся с увеличением числа панелей. Наименьшие погрешности наблюдаются для малых высот фермы.

Перераспределение масс по поясам фермы мало влияет на частотные характеристики конструкции. На рисунке 6 на основе решения (8) с коэффициентами (23) три кривые построены для разных коэффициентов *f*, задающих отношение масс узлов в верхнем поясе к массе в нижнем. С увеличением числа панелей эта разность уменьшается.

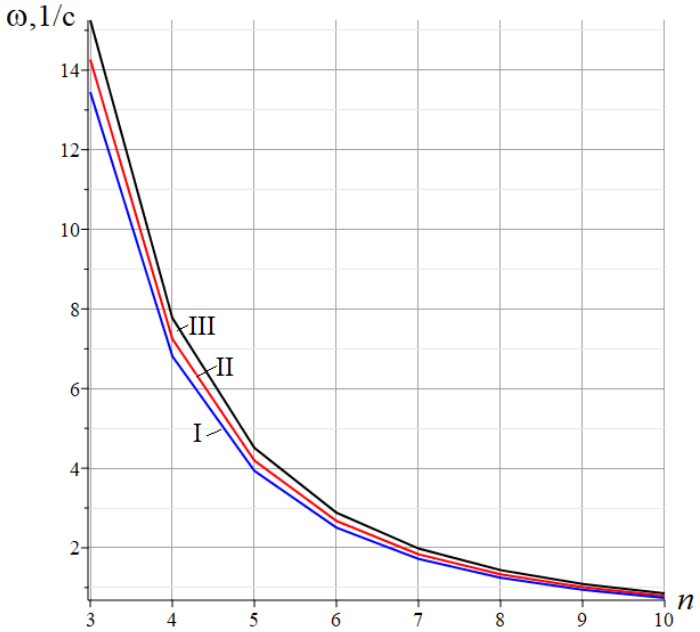

Рис. 6 – Зависимость первой частоты от числа панелей. I — f=1; II — f=0,75; III — f=0,5;
Fig. 6 – Dependence of the first frequency on the number of panels. I — f=1; II — f=0,75; III — f=0,5;

4 Conclusions

Приведен алгоритм получения формулы для нижней оценки первой собственной частоты плоской фермы с произвольным числом панелей. Построена математическая модель плоской статически определимой фермы с четырьмя опорами. Можно сделать следующие выводы:

1.Оценка Донкерлея для произвольного числа панелей является более компактной, чем решение по Рэлею, и дает приемлемую точность, особенно при большом числе панелей.

2. Аналитические оценки для наименьшей частоты колебаний, показывают, что точность оценки Рэлея даже при небольшом числе панелей достаточна для практического использования.

3. Перераспределение масс по поясам фермы мало влияет на первую частоту.

5 Fundings

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ 22-21-00473.

References

1 Han, Q.H., Xu, Y., Lu, Y., Xu, J. and Zhao, Q.H. (2015) Failure Mechanism of Steel Arch Trusses: Shaking Table Testing and FEM Analysis. *Engineering Structures*, Elsevier Ltd, **82**, 186–198. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.10.013.

2 Kiychenko, T.S., Tabanyukhova, M. V. and Kharinova, N. V. (2019) Determination of Stresses in Truss Rods: Numerical and Physical Experiment. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, IOP Publishing Ltd, **687**. https://doi.org/10.1088/1757-899X/687/3/033043.

3 Han, Q.H., Xu, Y., Lu, Y., Xu, J. and Zhao, Q.H. (2015) Failure Mechanism of Steel Arch Trusses: Shaking Table Testing and FEM Analysis. *Engineering Structures*, Elsevier, **82**, 186–198. https://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2014.10.013.

4 Sangeetha, P., Sundareswaran, R., Shanmugapriya, M., Srinidhi, S. and Sowmya, K. (2020) Influential Nodes in Planar Trusses and Meshes Using Centrality Measures. Materials Today: Proceedings, Elsevier Ltd, 932–939. https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.11.848.

5 Liu, G.R. and Quek, S.S. (2014) FEM for Trusses. *The Finite Element Method*, Butterworth-Heinemann, 81–110. https://doi.org/10.1016/B978-0-08-098356-1.00004-7.

6 Ilyushin, A.S. (2019) The Formula for Calculating the Deflection of a Compound Externally Statically Indeterminate Frame. *Structural mechanics and structures*, **22**, 29–38. https://elibrary.ru/item.asp?id=41201106.

7 Ovsyannikova, V.M. (2020) Dependence of the Deflection of a Planar External Statically Undeterminable Truss on the Number of Panels. *Structural Mechanics and Structures*, **27**, 16–25. https://www.elibrary.ru/download/elibrary_44374443_62905709.pdf.

8 Ovsyannikova, V.M. (2020) Dependence of Deformations of a Trapezous Truss Beam on the Number of Panels. *Structural Mechanics and Structures*, **26**, 13–20. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44110286.

9 Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N. and Serdjuks, D.O. (2020) Calculation of Deformations of a Cantilever-Frame Planar Truss Model with an Arbitrary Number of Panels. *Vestnik MGSU*, **4**, 510–517. https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.

10 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2005) Microarchitectured Cellular Solids - The Hunt for Statically Determinate Periodic Trusses. *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, **85**, 607–617. https://doi.org/10.1002/zamm.200410208.

11 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2006) The Structural Performance of the Periodic Truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Pergamon, **54**, 756–782. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008.

12 Sviridenko, O. V and Komerzan, E. V. (2022) The Dependence of the Natural Oscillation Frequency of the Console Truss on the Number of Panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **101**, 10101. https://doi.org/10.4123/CUBS.101.1.

13 Kirsanov, M. (2021) Deformations And Spatial Structure Vibrations Frequency of The Rectangular Contour Type Cover: Analytical Solutions. *AlfaBuild*, **98**, 9805. https://doi.org/10.4123/CUBS.98.5.

14 Kirsanov, M. (2023) Model of a Hexagonal Prismatic Truss. Oscillation Frequency Spectrum. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **106**, 10601. https://doi.org/10.4123/CUBS.106.01.

15 Komerzan, E. V., Lushnov, N.A. and Osipova, T.S. (2022) Analytical Calculation of the Deflection of a Planar Truss with an Arbitrary Number of Panels. *Structural mechanics and structures*, **33**, 17–25. https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.33.2.002.

16 Komerzan, E. Sviridenko, O. (2022) Static Deformations of the Truss of a Composite Spatial Frame. Analytical Solutions. *Structural mechanics and structures*, **35**, 40–48. https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.35.4.005.

17 Kirsanov, M. and Ivanitskii, A. (2023) Bilateral Analytical Estimation of the Natural Oscillation Frequency of a Planar Triangular Truss. *AlfaBuild*, **26**, 2601. https://doi.org/10.57728/ALF.26.1.

18 Petrenko, V.F. (2021) The Natural Frequency of a Two-Span Truss. *AlfaBuild*, 2001. https://doi.org/10.34910/ALF.20.1.

19 Kirsanov, M. (2019) Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, GB. https://www.cambridgescholars.com/product/978-1-5275-5976-9.

20 Ivanitskii, A.D. (2022) Formulas for Calculating Deformations of a Planar Frame. *Structural mechanics and structures*, Voronezh State Technical University, **34**, 90–98. https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.34.3.007.

21 Astakhov, S. (2017) The Derivation of Formula for Deflection of Statically Indeterminate

Externally Flat Truss under Load at Midspan. *Construction and Architecture*, RIOR Publishing Center, **5**, 50–54. https://doi.org/10.12737/article_596f6d7da0eb38.03494133.

22 Dai, Q. (2021) Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. *AlfaBuild*, **17**, 1701. https://doi.org/10.34910/ALF.17.1.

23 Goloskokov, D.P. and Matrosov, A. V. (2015) Comparison of Two Analytical Approaches to the Analysis of Grillages. 2015 International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015 - Proceedings, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 382–385. https://doi.org/10.1109/SCP.2015.7342169.

24 Goloskokov, D.P. (2014) Analyzing Simply Supported Plates Using Maple System. 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications, ICCTPEA 2014 - Proceedings, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 55–56. https://doi.org/10.1109/ICCTPEA.2014.6893273.

25 Kaveh, A. (2013) Optimal Analysis of Structures by Concepts of Symmetry and Regularity. *Optimal Analysis of Structures by Concepts of Symmetry and Regularity*, Springer-Verlag Wien, **9783709115**, 1–463. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1565-7.

26 Kaveh, A. and Zolghadr, A. (2018, October 1) Meta-Heuristic Methods for Optimization of Truss Structures with Vibration Frequency Constraints. Acta Mechanica, Springer-Verlag Wien, 3971–3992. https://doi.org/10.1007/s00707-018-2234-z.

27 Galishnikova V.V. (2019) Nonlinear Numerical Stability Analysis of Space Trusses. *EG-ICE 2010 - 17th international workshop on intelligent computing in engineering*. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43274656.

28 Kirsanov, M.N. (2023) Energy Collocation Method for the Truss Fundamental Frequency Estimation. *Structural mechanics and structures*, **36**, 27–37. https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.36.1.003.

29 Zotos, K. (2007) Performance Comparison of Maple and Mathematica. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, **188**, 1426–1429. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.008.

30 Low, K.H. (2000) Modified Dunkerley Formula for Eigenfrequencies of Beams Carrying Concentrated Masses. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier Science Ltd, **42**, 1287–1305. https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00049-1.