

Research Article

Received: January 01, 2023

Accepted: January 15, 2023

Published: January 30, 2023

ISSN 2658-5553

Bilateral Analytical Estimation of the Natural Oscillation Frequency of a Planar Triangular Truss

Kirsanov, Mikhail Nikolaevich¹ Ivanitskii, Artem Dmitrievich² ^{1,2}Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian FederationCorrespondence: ¹email c216@ya.ru; contact phone [+7\(965\)-183-35-34](tel:+7(965)-183-35-34), ²email artem.ivanitskii@outlook.com; contact phone [+7\(922\)-653-66-96](tel:+7(922)-653-66-96),

Keywords:

Truss; Maple; Analytical Solution; Natural frequency; Induction; Symbolic solution; Dunkerley method; Rayleigh method; Number of panels; Maxwell – Mohr formula; lattice truss; planar truss.

Abstract:

The object of research is a statically determinate planar truss. The scheme of a lattice console structure in the form of a triangle is considered. Also, a structural feature is the presence of upper and lower belts, as well as braces. **Method.** The calculation of forces in the rods is carried out by cutting nodes from the solution of the system of equilibrium equations for all nodes in the projection on the coordinate axis. To derive formulas for the dependence of forces and the frequency of free oscillations, an inductive generalization of the sequence of solutions for structures with a different number of panels is used. The structural stiffness matrix is calculated using the Maxwell-Mohr formula in analytical form. Dunkerley and Rayleigh methods are used to find estimates of the lowest oscillation frequency of nodes endowed with masses. All mathematical transformations are performed in the Maple symbolic mathematics system. **Results.** Under the assumption that vibrations of loads concentrated in the nodes of the structure occur only along the vertical, and the rigidities of all rods are the same, compact formulas are obtained for upper and lower estimates of the first (main) frequency of natural oscillations of the system for an arbitrary number of panels. The upper estimate of the first oscillation frequency of the nodes has a rather higher than the lower estimate. The analytical solution is compared with the lowest oscillation frequency obtained numerically. The accuracy of the upper estimate of the frequency is very high and almost independent of the construction order.

1 Introduction / Введение

В инженерной практике практическое применение имеют численные решения, при этом зачастую аналитические дополняют их. Выполняя роль тестовых решений, вторые удобны как для оценки точности численных решений, так и для предварительных расчетов проектируемых сооружений. Эта особенность проявляется в очень большом количестве элементов, например, в фермах большепролетных мостов и покрытиях зданий и сооружений [1]. Если конструкция является регулярной, и можно выделить периодически повторяющуюся группу стержней, то аналитические методы могут быть использованы для преодоления трудностей, возникающих при оценке ее напряженно-деформированного состояния при расчете [2,3]. Известны и широко используются на практике аналитические методы, при которых численные расчеты, основанные на вариационных принципах в системе символьной математики, заменяются аналитическими с сохранением результатов вычисления алгоритма [4,5]. Этот метод применим как к обычным, так и к произвольным системам. Индуктивный аналитический метод расчета структур применим для регулярных систем с периодически

Kirsanov, M; Ivanitskii, A.;

Bilateral Analytical Estimation of the Natural Oscillation Frequency of a Planar Triangular Truss; 2023; *AlfaBuild*; Volume 26 Article No 2601. doi: 10.57728/ALF.26.1

повторяющимися структурами и приводит, как правило, к простым расчетным формулам [6]. Индуктивный метод основан на обобщении последовательности решений для ферм с различным числом панелей и в основном используется для статически определимых систем [7]. Впервые проблема существования и анализа статически определимых плоских и пространственных регулярных ферм была поднята Хатчинсоном Р.Г., Флеком Н.А. [8,9]. Известны также формулы для расчета арочных [10,11] и решетчатых шпренгельных [12] и консольных ферм [13,14]. Индукционный метод применим и для получения аналитических оценок собственных частот колебаний регулярных структур [13,15] с произвольным числом панелей. Известны аналитические оценки снизу первой (основной) собственной частоты свободных колебаний ферм [16,17] методом Донкерлея и оценки этой же частоты сверху методом Рэлея с использованием метода индукции [18,19]. Методом индукции получены решения для расчета частоты колебаний решетчатой двухпролетной фермы, допускающей кинематическую изменяемость [20]. Обзор некоторых аналитических расчетов плоских регулярных ферм на основе индукционного метода с использованием символической математики приведен в [21,22].

В этой статье предлагается анализ схемы для плоской решетчатой консольной регулярной статически определимой фермы. Поставлена задача вывести аналитические зависимости нижней и верхней оценки первой частоты колебаний от числа панелей. Полученные формулы могут быть использованы для оценки численных решений, особенно для крупномасштабных конструкций, при численных расчетах которых неизбежно накопление ошибок округления, приводящих к потере точности расчета.

2 Materials and Methods / Материалы и методы

2.1 Design of the truss / Конструкция фермы

Структура фермы состоит из верхнего и нижнего поясов и также раскосов. Раскосы решетчатой фермы имеют одинаковый наклон и фиксируются на вертикальной стенке в шарнирах с шагом b по высоте (рис. 1). Длина каждого стержня нижнего пояса равна a , длина всего пояса консоли составляет na , где n — порядок регулярности фермы. Длина одного стержня верхнего пояса равна $\sqrt{a^2 + b^2}$, тогда, соответственно, длина всего верхнего пояса составляет $n\sqrt{a^2 + b^2}$. Вся структура состоит из $n_s = 4n - 2$ стержней.

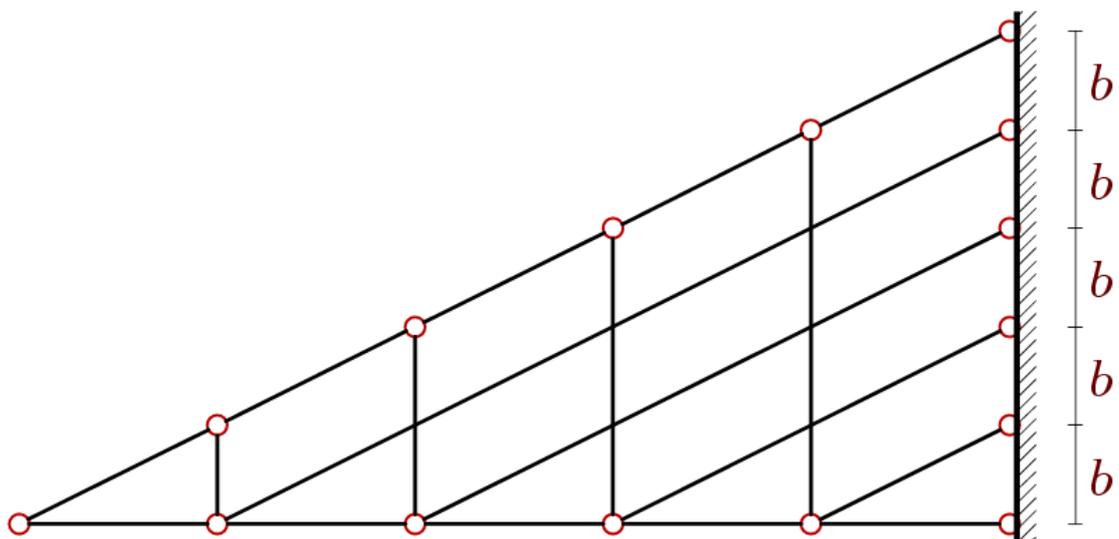


Рис. 1. Конструкция при $n = 5$.

Fig. 1. Construction at $n = 5$.

2.2 Force Calculation Algorithm / Алгоритм расчета усилий

Число узлов конструкции с учетом опорных узлов на стенке составляет $K = 3n$. Ферма нагружена вертикальными силами, равномерно распределенными по внутренним узлам. Усилия в стержнях рассчитываются в программе, написанной на языке *Maple*. Программа основана на методе вырезания узлов. Для ввода в программу информации о структуре

сооружения: узлы нумеруются и вводятся их координаты (рис. 2). Сначала нумеруются узлы нижнего пояса, а затем нижнего:

Координаты узлов нижнего пояса:

$$x_i = ia - a,$$

$$y_i = 0.$$

Координаты узлов верхнего пояса:

$$x_{i+n} = ia,$$

$$y_{i+n} = bi.$$

Тогда опорные узлы определяются следующими соотношениями:

$$x_{i+2n-1} = na,$$

$$y_{i+2n-1} = bi - b.$$

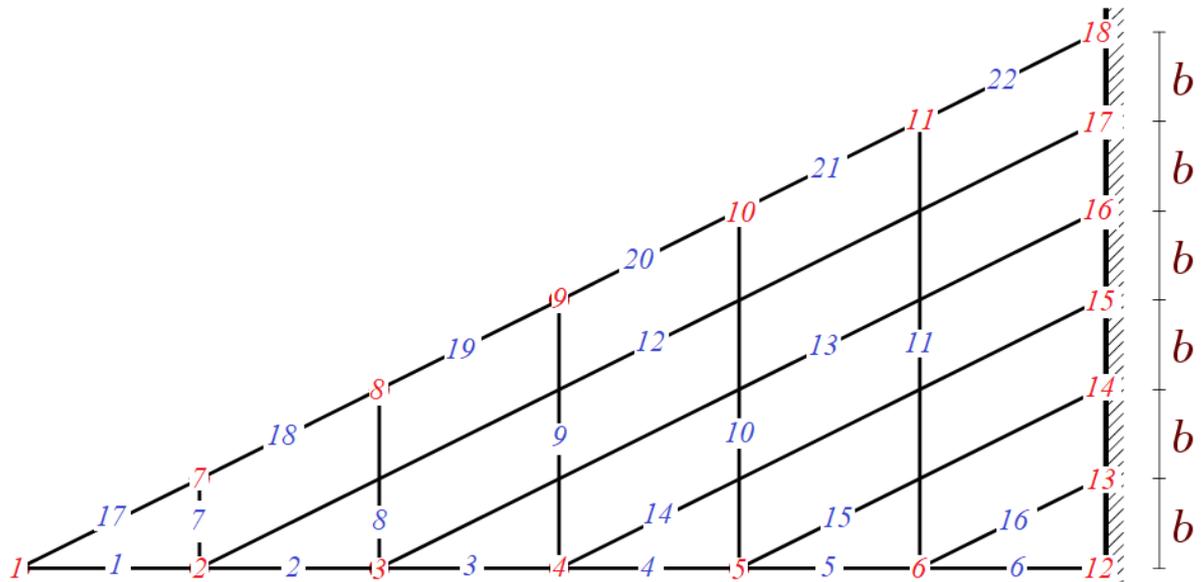


Рис. 2. Конструкция с нумерацией узлов и стержней при $n = 6$.

Fig. 2. Construction with numbering of nodes and rods at $n = 6$.

3 Results and Discussion / Результаты и обсуждение

3.1 Natural frequency / Собственная частота

Большинство динамических расчетов конструкций включают в себя вычисление значения первой (наименьшей) частоты собственных колебаний. Как правило, вычисление собственных частот выполняется численно на основе различных вариантов метода конечных элементов [23,24]. Аналитические расчеты возможны только в виде верхней и нижней частотных оценок для первой частоты [25,26]. Эти методы основаны на вычислении парциальных частот, значения которых в некоторых случаях могут быть найдены аналитически. Для регулярных конструкций аналитические оценки могут обобщаться на произвольное число панелей с использованием метода индукции [27,28], что делает применение результатов более широким.

Инерционные свойства рассматриваемой конструкции моделируются с помощью сосредоточения масс m в узлах фермы. Пренебрегая горизонтальными перемещениями узлов, рассматриваются только их вертикальные колебания. Число степеней свободы системы масс фермы порядка n равно в такой постановке количеству узлов $K = 3n$.

Дифференциальные уравнения для движения масс в матричном виде:

$$\mathbf{M}_K \ddot{\mathbf{Z}} + \mathbf{D}_K \mathbf{Z} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{Z} — вектор вертикальных перемещений масс $1, \dots, K$; \mathbf{M}_K — матрица инерций размером $K \times K$, \mathbf{D}_K — матрица жесткости, $\ddot{\mathbf{Z}}$ — вектор ускорения. В случае равных масс матрица инерции пропорциональна единичной матрице $\mathbf{M}_K = m\mathbf{I}_K$. Матрица \mathbf{B}_K является



обратной к матрице жесткости \mathbf{D}_K , которую можно найти с помощью формулы Максвелла – Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{n_s} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF), \quad (2)$$

где $S_{\alpha}^{(i)}$ — сила в стержне α от действия единичной вертикальной силы в узле i . Задача сводится к задаче о собственных значениях матрицы \mathbf{B}_K . Если умножить матричное уравнение (1) на \mathbf{B}_K слева с учетом замены $\ddot{\mathbf{Z}} = -\omega^2 \mathbf{Z}$, следующей из формы гармонических колебаний

$$z_i = u_i \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3)$$

то получится уравнение задачи для собственных значений матрицы $\mathbf{B}_K \mathbf{Z} = \lambda \mathbf{Z}$, где $\lambda = 1/(m\omega^2)$ является собственным значением матрицы \mathbf{B}_K , ω — собственная частота колебаний. Отсюда частота собственных колебаний имеет вид: $\omega = \sqrt{1/(m\lambda)}$. Задача о собственных значениях решается с помощью специального оператора **Eigenvalues** поиска собственных значений из пакета **LinearAlgebra** системы **Maple**.

Элементы матрицы \mathbf{B}_K зависят от усилий $S_{\alpha}^{(i)}$ в стержнях, которые находятся из решения системы уравнений узлов фермы в проекциях на координатные оси. Эта же система включает в себя и реакции опор.

Для оценки частоты используются два приближенных метода, которые дают ее верхнюю и нижнюю границы.

3.1.1 Lower estimate by the Dunkerley method / Оценка нижней частоты по методу Донкерлея

Нижняя оценка первой частоты колебаний получается по формуле Донкерлея:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^K \omega_i^{-2}, \quad (4)$$

где ω_i — частота колебаний одной массы m , расположенной в узле i . Для вычисления парциальных частот ω_i составляется уравнение (1) в скалярной форме:

$$m\ddot{z}_i + D_i z_i = 0,$$

где D_i — скалярный коэффициент жесткости (i — номер массы). Частота колебаний узла:

$$\omega_i = \sqrt{D_i / m}. \quad (5)$$

Коэффициент жесткости, обратный коэффициенту податливости, определяется по формуле Максвелла – Мора (2)

$$\delta_i = 1 / D_i = \sum_{\alpha=1}^{n_s} \left(\tilde{S}_{\alpha}^{(i)} \right)^2 l_{\alpha} / (EF).$$

Из (4) и (5) следует $\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^K \omega_i^{-2} = m \sum_{i=1}^K \frac{1}{D_i}$. Поскольку податливость является обратной

величиной жесткости $1 / D_i = \delta_i$, значит

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{i=1}^K \delta_i = m \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha=1}^{n_s} \left(\tilde{S}_{\alpha}^{(i)} \right)^2 l_{\alpha} / (EF) = m \Sigma_n / (b^2 EF). \quad (6)$$



Далее производится последовательный подсчет суммы $\Sigma_n = h^2 \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha=1}^{n_s} \left(\tilde{S}_{\alpha}^{(i)} \right)^2 l_{\alpha}$ при $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= a^3 + c^3, \\ \Sigma_2 &= 4a^3 + 4c^3 + b^3, \\ \Sigma_3 &= 3a^3 + 3c^3 + b^3, \\ \Sigma_4 &= 8a^3 + 8c^3 + 3b^3, \\ \Sigma_5 &= 5a^3 + 5c^3 + 2b^3, \\ \Sigma_6 &= 12a^3 + 12c^3 + 5b^3, \\ &\dots\end{aligned}$$

где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Вычисляются общие члены последовательностей коэффициентов в этих выражениях.

Введено обозначение суммы: $\Sigma_n = \sum_{\alpha=[a, c, b]} r_{\alpha} \alpha^3$, где

$$r_a = r_c = n^2, r_b = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (7)$$

При выводе выражений для коэффициентов (7) оператор `rgf_findrecur` использовался для составления рекуррентных уравнений в системе *Maple*. Оператор `rsolve` требуется для решения этих уравнений и получения общих членов последовательностей. Прямое применение такого алгоритма не дает результата в данном случае, поскольку члены последовательностей имеют вид дробей, в которых не только числители, но и знаменатели зависят от n . Системные операторы *Maple* не предназначены для определения общих членов таких последовательностей. Альтернативный метод поиска общих членов последовательностей предоставляется оператором `FindSequenceFunction` из пакета символьной математики *Wolfram Mathematica*. В данном случае уравнения имеют простые решения. В результате нижняя оценка для первой частоты по Донкерлея составляет:

$$\omega_D = b \sqrt{\frac{EF}{m \sum_{\alpha=[a, c, b]} r_{\alpha} \alpha^3}}. \quad (8)$$

3.1.2 Higher estimate by the Rayleigh method / Оценка верхней частоты по методу Релея

Метод Релея основан на законе сохранения энергии. В каждом цикле гармонических колебаний происходит переход из потенциальной энергии деформации в кинетическую и наоборот. Имеет место равенство:

$$T_{\max} = \Pi_{\max} \quad (9)$$

Отсюда следует формуле Рэлея для верхней оценки первой частоты. Кинетическая энергия системы всех масс m , расположенных в узлах структуры, имеет вид:

$$T = \sum_{i=1}^K m v_i^2 / 2.$$

Вертикальная скорость массы i в соответствии с (3): $v_i = \dot{z}_i = \omega u_i \sin(\omega t + \varphi_0)$. Предполагая, что при максимальной кинетической энергии $\max(\sin(\omega t + \varphi_0)) = 1$, имеем:



$$T_{\max} = \omega^2 m \sum_{i=1}^K u_i^2 / 2, \quad (10)$$

где амплитуда вертикального смещения вычисляется по формуле Максвелла-Мора:

$$u_i = \sum_{\alpha=1}^{n_s} S_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (EF) = P \sum_{\alpha=1}^{n_s} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (EF) = P \tilde{u}_i \quad (11)$$

Используются предыдущие обозначения: $S_{\alpha}^{(P)}$ — усилие в стержне $\alpha = 1, \dots, n_s$ от действия нагрузки P , равномерно распределенные по узлам, $\tilde{S}_{\alpha}^{(i)}$ — сила в одном и том же стержне от одной (безразмерной) нагрузки, приложенной к массе с числом i , $\tilde{S}_{\alpha}^{(P)} = S_{\alpha}^{(P)} / P$. Форма колебаний системы масс с первой частотой близка к форме прогиба конструкции от равномерной нагрузки. Таким образом, (10) принимает вид:

$$T_{\max} = P^2 \omega^2 \sum_{i=1}^K m \tilde{u}_i^2 / 2, \quad (12)$$

где $\tilde{u}_i = u_i / P = \sum_{\alpha=1}^{n_s} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (EF)$ — амплитуда перемещений массы с номером i под действием распределенной нагрузки, отнесенной к значению P .

Потенциальная энергия деформации упругих стержней:

$$\Pi_{\max} = \sum_{\alpha=1}^{n_s} S_{\alpha}^{(P)} \Delta l_{\alpha} / 2 = \sum_{\alpha=1}^{n_s} (S_{\alpha}^{(P)})^2 l_{\alpha} / (2EF). \quad (13)$$

В силу линейности задачи по нагрузке верна следующая формула: $S_{\alpha}^{(P)} = P \sum_{i=1}^N \tilde{S}_{\alpha}^{(i)}$.

Отсюда получается:

$$\Pi_{\max} = P^2 \sum_{\alpha=1}^{n_s} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \sum_{i=1}^K \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (2EF) = P^2 \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha=1}^{n_s} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (2EF) = P^2 \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i / 2. \quad (14)$$

Из (9), (12), (14) следует формула Рэлея для верхней оценки первой частоты колебаний фермы:

$$\omega_R^2 = \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i / \sum_{i=1}^K m \tilde{u}_i^2. \quad (15)$$

Обобщением ряда решений для перемещения \tilde{u}_i при различных n находится зависимость частоты от порядка построения n . Суммы $\sum_{i=1}^K \tilde{u}_i$ и $\sum_{i=1}^K \tilde{u}_i^2$ рассматриваются отдельно.

Расчет смещения для ферм с разным количеством панелей показывает, что решение для сумм $\sum_{i=1}^K \tilde{u}_i$ в числителе (15) имеет вид:

$$\sum_{i=1}^K \tilde{u}_i = m(C_a a^3 + C_c c^3 + C_b b^3) / (b^2 EF), \quad (16)$$



или в более компактной форме:

$$\sum_{i=1}^K \tilde{u}_i = \sum_{\alpha=[a, c, b]} m g_{\alpha} \alpha^3 / (b^2 EF), \quad (17)$$

где коэффициенты C_a, C_c, C_b получены методом индукции, обобщающим ряд решений для различных n :

$$\begin{aligned} n=1, \quad \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i &= m(a^3 + c^3) / (b^2 EF), \\ n=2, \quad \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i &= m(10a^3 + 6c^3 + b^3) / (b^2 EF), \\ n=3, \quad \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i &= m(35a^3 + 15c^3 + 3b^3) / (b^2 EF), \\ n=4, \quad \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i &= m(42a^3 + 14c^3 + 3b^3) / (b^2 EF), \\ n=5, \quad \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i &= m(33a^3 + 9c^3 + 2b^3) / (b^2 EF), \\ &\dots \end{aligned} \quad (18)$$

В результате получаются коэффициенты:

$$C_a = (4n^3 - n) / 3, \quad C_c = (2n^2 - n), \quad C_b = (n^2 - n) / 2. \quad (19)$$

Знаменатель (17) имеет более сложную форму:

$$\sum_{k=1}^N m \tilde{u}_k^2 = \sum_{\alpha, \beta=[a, c, b]} m C_{\alpha\beta} \alpha^3 \beta^3 / (b^4 E^2 F^2), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} C_{aa} &= (16n^5 - n) / 15, \\ C_{cc} &= (8n^3 - 9n^2 + 4n) / 3, \\ C_{bb} &= (2n^3 - 3n^2 + n) / 6, \\ C_{ac} &= (10n^4 - 6n^3 + 2n^2) / 3, \\ C_{ab} &= (n^4 - n^2) / 2, \\ C_{cb} &= (2n^3 - 2n) / 3. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, верхняя оценка первой частоты фермы, в зависимости от количества панелей, может быть получена по формуле:

$$\omega_R = b \sqrt{\frac{EF \sum_{\alpha=[a, c, b]} C_{\alpha} \alpha^3}{m \sum_{\alpha, \beta=[a, c, b]} C_{\alpha\beta} \alpha^3 \beta^3}} \quad (22)$$

с коэффициентами (19), (21), зависящими только от порядка n .

Формула (22) почти совпадает по форме с формулой (8), полученной методом Донкерлея, но вторая намного проще. В этой формуле искомые коэффициенты содержатся только в знаменателе.

3.1.3 Numerical solution / Численное решение

Чтобы оценить погрешность найденных оценок, рассмотрим ферменную конструкцию с числом панелей n размерами $b = 1$ м, $a = 4$ м. Массы в узлах $m = 400$ кг. При решении принята жесткость стальных стержней, $E = 2.0 \cdot 10^5$ МПа, $F = 9$ см². На рисунке 3 изображены зависимости от количества панелей верхней оценки наименьшей частоты ω_R согласно формуле (22), оценка Донкерлея ω_D (8) и численное значение первой частоты спектра ω_1 , найденное путем анализа решения задачи о колебаниях системы с K степени свободы.

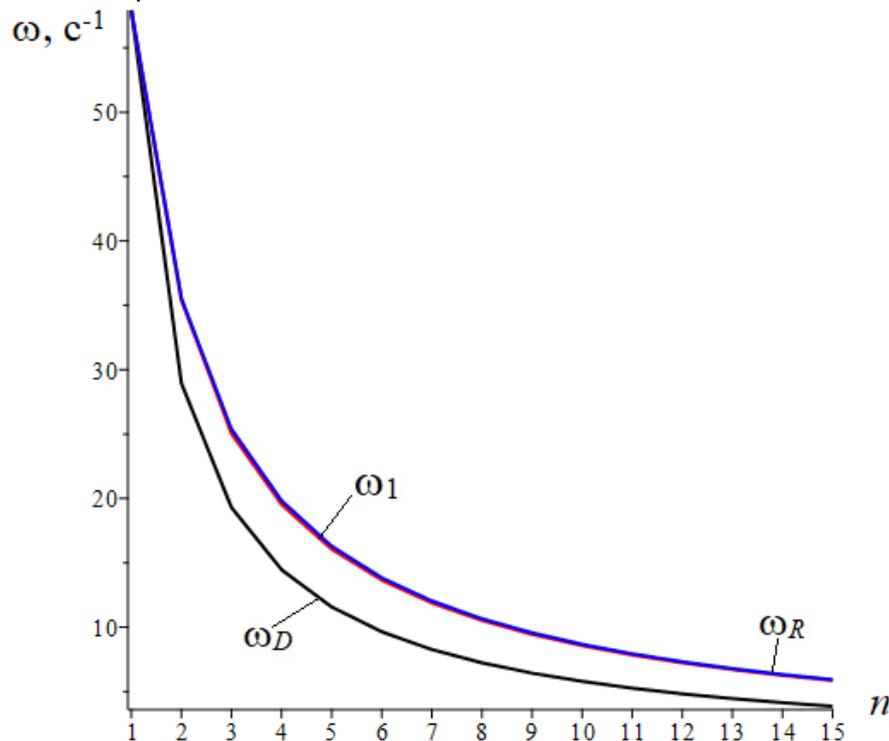


Рис. 3. Зависимость от количества панелей первой частоты колебаний ω_R согласно методу Рэлея, частота ω_D в соответствии с методом Донкерлея ω_D и первой частотой ω_1 спектра, полученного численно.

Fig. 3. The dependence on the number of panels of the first oscillation frequency according to the Rayleigh method ω_R , the frequency according to the Dunkerley method ω_D and the first frequency of the spectrum obtained numerically ω_1 .

По мере увеличения количества панелей частота уменьшается. Также очевидно, что погрешность метода Донкерлея намного больше, чем погрешность метода Рэлея. Для более точной оценки погрешности вводятся относительные погрешности $\varepsilon_D = |\omega_D - \omega_1| / \omega_1$, $\varepsilon_R = |\omega_R - \omega_1| / \omega_1$. График 4 показывает, что погрешность метода Рэлея не превышает 2.5%, а метода погрешность Донкерлея стремится к 35%.

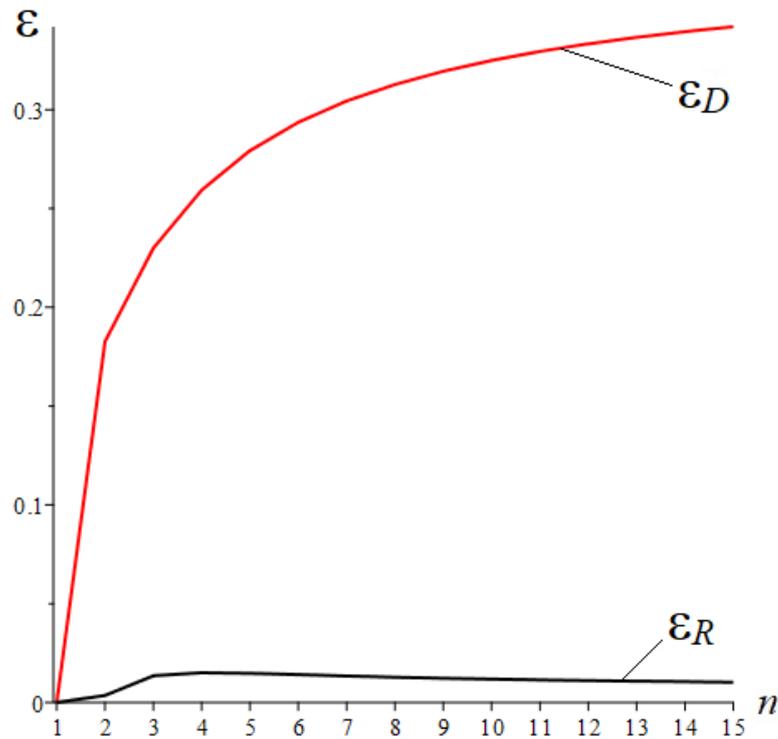


Рис. 4. Относительная погрешность верхней ε_R и нижней ε_D оценок.

Fig. 4. Relative error of the upper ε_R and lower ε_D estimates.

4 Conclusions / Выводы

Для статически определимой плоской фермы методом индукции были выведены формулы двусторонней оценки первой собственной частоты для произвольного числа панелей. Результирующие расчетные формулы для частоты колебаний консоли в рамках принятой модели были получены без каких-либо дополнительных упрощающих допущений и могут быть использованы как для оценки точности численных решений, так и для предварительной оценки эксплуатационных характеристик проектируемого сооружения. Эти формулы эффективны в качестве альтернативы численным расчетам, особенно для структур высокого порядка регулярности, которые характеризуются неизбежным накоплением ошибок округления и большими затратами компьютерного времени.

Найденные аналитические оценки наименьшей частоты колебаний показали, что точность оценки Рэлея весьма высока и вполне достаточна для использования полученной формулы в расчетах, а точность более простой нижней оценки частоты неудовлетворительна.

Аналитические решения позволяют анализировать и выбирать наиболее оптимальные параметры упрощенной модели проектируемого сооружения без использования численного решения реального сооружения. Одним из преимуществ аналитического решения Рэлея является то, что его точность почти не зависит от порядка регулярности конструкции.

5 Acknowledgements / Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

References

- Ivanitskii, A.D. (2022) Formulas for Calculating Deformations of a Planar Frame. *Structural mechanics and structures*, 90–98. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.34.3.007>.
- Tinkov, D. V. (2016) The Optimum Geometry of the Flat Diagonal Truss Taking into Account Kirsanov, M; Ivanitskii, A.; Bilateral Analytical Estimation of the Natural Oscillation Frequency of a Planar Triangular Truss; 2023; *AlfaBuild*; Volume 26 Article No 2601. doi: 10.57728/ALF.26.1



- the Linear Creep. *Magazine of Civil Engineering*, **61**, 25–32. <https://doi.org/10.5862/MCE.61.3>.
- 3 Kirsanov, M.N. (2018) Formulas for Computing of Deflection and Forces in the Truss with Arbitrary Number of Panels. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Publishing House ASV (Izdatelstvo ASV), **14**, 90–95. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2018-14-2-90-95>.
- 4 Kirsanov, M.N. and Qiao, D. (2021) Dependence of the Natural Oscillation Frequency of the Half-Tilt Console on the Number of Panels. *Structural Mechanics and Structures*, **28**, 39–44.
- 5 Kirsanov, M.N. (2015) Analysis of the Deflection of a Strut-Type Lattice Girder Truss. *Magazine of Civil Engineering*, **57**, 58–65. <https://doi.org/10.5862/mce.57.5>.
- 6 Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N. and Serdjuks, D.O. (2020) Calculation of Deformations of a Cantilever-Frame Planar Truss Model with an Arbitrary Number of Panels. *Vestnik MGSU*, 510–517. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.4.510-517>.
- 7 Kirsanov, M.N., Komerzan, E. and Sviridenko, O. (2018) Inductive Analysis of the Deflection of a Beam Truss Allowing Kinematic Variation. *MATEC Web of Conferences*, **239**, 1012. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201823901012>.
- 8 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2006) The Structural Performance of the Periodic Truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **54**, 756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>.
- 9 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2005) Microarchitected Cellular Solids - The Hunt for Statically Determinate Periodic Trusses. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **85**, 607–617. <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>.
- 10 Tyukalov, Y. (2020) Optimal Shape of Arch Concrete Block Bridge. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **93**, 9307. <https://doi.org/10.18720/CUBS.93.7>.
- 11 He, Z.Q., Xu, T. and Liu, Z. (2020) Decoupling of Arch Action and Truss Action in Deep Beams by Strain Energy. *Structures*, Elsevier, **26**, 185–192. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2020.04.020>.
- 12 Dai, Q. (2021) Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. *AlfaBuild*, **17**, 1701. <https://doi.org/10.34910/ALF.17.1>.
- 13 Sviridenko, O. V. and Komerzan, E. V. (2021) Analytical Calculation of the Deflection of a Plane External Statically Undetermined Truss with an Arbitrary Number of Panels. *Structural Mechanics and Structures*, **2**, 7–11.
- 14 Ovsyannikova, V.M. (2020) Dependence of Deformations of a Trapezoidal Truss Beam on the Number of Panels. *Structural Mechanics and Structures*, **26**, 13–20. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44110286>.
- 15 Wang, S., Ma, Y. and Deng, Z. (2021) Two-Node Method for the Effective Elastic Properties of Periodic Cellular Truss Materials and Experiment Verification via Stereolithography. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Elsevier Masson, **87**, 104201. <https://doi.org/10.1016/J.EUROMECHSOL.2020.104201>.
- 16 Vorobev, O.V. (2020) Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **92**, 9204. <https://doi.org/10.18720/CUBS.92.4>.
- 17 Vorobyev, O. (2020) About Methods of Obtaining Analytical Solution for Eigenfrequencies Problem of Trusses. *Structural mechanics and structures*, **1**, 25–38. http://vuz.exponenta.ru/PDF/NAUKA/elibrary_42591122_21834695.pdf.
- 18 Mochida, Y. and Ilanko, S. (2021) On the Rayleigh-Ritz Method, Gorman's Superposition Method and the Exact Dynamic Stiffness Method for Vibration and Stability Analysis of Continuous Systems. *Thin-Walled Structures*, Elsevier Ltd, **161**, 107470. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107470>.
- 19 Liu, X., Zhao, Y., Zhou, W. and Banerjee, J.R. (2022) Dynamic Stiffness Method for Exact Longitudinal Free Vibration of Rods and Trusses Using Simple and Advanced Theories. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, **104**, 401–420. <https://doi.org/10.1016/J.APM.2021.11.023>.
- 20 Tinkov, D. V and Safonov, A.A. (2017) Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, Allerton Press Incorporation, **46**, 46–52. <https://doi.org/10.3103/S1052618817010149>.
- 21 Tinkov, D. V. (2015) Comparative Analysis of Analytical Solutions to the Problem of Truss



- Structure Deflection. *Magazine of Civil Engineering*, **57**. <https://doi.org/10.5862/MCE.57.6>.
- 22 Ovsyannikova, V.M. (2020) Dependence of the Deflection of a Planar External Statically Undeterminable Truss on the Number of Panels. *Structural Mechanics and Structures*, **27**, 16–25. https://www.elibrary.ru/download/elibrary_44374443_62905709.pdf.
- 23 Mrdak, I., Rakočević, M., Žugić, L., Usmanov, R., Murgul, V. and Vatin, N. (2014) Analysis of the Influence of Dynamic Properties of Structures on Seismic Response According to Montenegrin and European Regulations. *Applied Mechanics and Materials*, Trans Tech Publications Ltd, **633–634**, 1069–1076. <https://doi.org/10.4028/WWW.SCIENTIFIC.NET/AMM.633-634.1069>.
- 24 Vatin, N., Havula, J., Martikainen, L., Sinelnikov, A.S., Orlova, A. and Salamakhin, S. (2014) Buckling Force of the Thin-Walled Cross-Sections and Shear Resistance of Their Joints: Tests and FEM-Modelling. *The International Scientific Conference „Innovative Materials, Structures and Technologies”*, Riga Technical University, **0**, 187–192. <https://doi.org/10.7250/ISCCONSTRS.2014.31>.
- 25 Vatin, N., Havula, J., Martikainen, L., Sinelnikov, A., Orlova, A. V. and Salamakhin, S. V. (2014) Thin-Walled Cross-Sections and Their Joints: Tests and FEM-Modelling. *Advanced Materials Research*, Trans Tech Publications Ltd, **945–949**, 1211–1215. <https://doi.org/10.4028/WWW.SCIENTIFIC.NET/AMR.945-949.1211>.
- 26 Vatin, N.I., Ivanov, A.Y., Rutman, Y.L., Chernogorskiy, S. and Shvetsov, K.V. (2017) Earthquake Engineering Optimization of Structures by Economic Criterion. *Magazine of Civil Engineering*, **8**, 67–83. <https://doi.org/10.18720/MCE.76.7>.
- 27 Petrenko, V.F. (2021) The Natural Frequency of a Two-Span Truss. *AlfaBuild*, 2001. <https://doi.org/10.34910/ALF.20.1>.
- 28 Sergeev, M.S., Gribanov, A.S. and Roschina, S.I. (2020) The Stress Strain State of Composite Multi-Span Beams. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Institute of Physics Publishing, 32068. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/753/3/032068>.