




Deformations and natural frequency spectrum of a planar truss with an arbitrary number of panels

Kirsanov, Mikhail Nikolaevich¹ 

Luong, Cong Luan^{1*} 

¹ Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation; c216@ya.ru (K.M.N.); luongcongluan96@gmail.com (L.C.L)

Keywords:

Truss; Deflection; Induction; Maple; Natural frequency; Maxwell–Mohr formula; Dunkerley method; Spectra of frequencies; Spectral constant

Abstract:

The object of the study is a planar, statically determined lattice truss on two supports. The lower belt of the contour structure is an isosceles trapezoid. The task is to obtain formulas for the dependence of the deflection and lower limit of the truss natural frequency on the number of panels. To obtain the deviation value, the Maxwell – Mohr formula is used. The forces in the rods are determined in a conditional form by cutting out nodes from the solution of a system of linear equations in the Maple computer mathematics system. The system of equations includes both the forces in the rods and the reactions of the supports. Analytical expressions for the lower limit of the truss natural frequency is found using the Dunkerley formula and the induction method for an arbitrary number of panels. It is assumed that the mass of the truss is concentrated in its nodes, each having one degree of freedom, and the rigidity of the rods is the same. Based on the results of deflection calculations in a series of similar trusses with different numbers of panels, the desired dependence of deflection on load, elastic properties of rods, and the number of panels is derived. In this paper, a linear asymptote of the deflection problem is found. The analytical frequency estimate is compared with the lowest frequency of the entire frequency spectrum found numerically. Regularities in the distribution of frequencies in the spectrum of trusses of various orders are found.

1 Introduction

Стропильные конструкции широко применяются в конструкциях корпусов и крыш общественных зданий, промышленных и коммерческих предприятий. Как отдельные элементы такие фермы используются и в машиностроении и робототехнике. Их преимущество в том, что они удобны, просты и дешевы в сборке, долговечны и достаточно жестки. Использование ферм снижает расход используемых материалов и способствует уменьшению веса конструкций. Технические задачи, связанные с расчетом жесткости, прочности, устойчивости и частоты колебаний ферменных конструкций, как правило, на практике решаются численно в программах, основанных на методе конечных элементов [1]–[8]. Если для модели простой фермы с небольшим числом панелей такой подход вполне достаточен, то при большом количестве стержней или панелей фермы численный расчет заметно увеличивается в объеме и при этом неизбежно возрастают погрешности расчета за счет накопления ошибок округления. Альтернативой численному расчету в некоторых случаях является аналитический подход. Его можно использовать в качестве пробного решения и предварительного чернового расчета основных характеристик конструкции. Точность этих расчетов определяется достоверностью математической модели исследуемого объекта. Общие вопросы существования и моделирования статически определимых регулярных стержневых систем рассмотрены в [9], [10].

Формулы прогиба плоских регулярных ферм, рам и арок при различных нагрузках собраны в справочниках [11], [12]. Эти формулы получены методом индукции в системе символьной математики Maple [13]–[16] и применимы как для оценки точности численных решений, так и для предварительных расчетов проектируемых моделей, для которых можно выбрать наилучший вариант путем подбора порядка регулярной системы, ее размеров и распределения жесткостей отдельных стержней. Аналитические оценки первой собственной частоты однопролетных ферм с произвольным числом панелей получены в виде компактных формул с помощью метода Донкерлея в работах [17]–[20]. Двухсторонняя оценка первой частоты колебаний фермы с применением энергетического метода Рэлея и метода Донкерлея в аналитической форме найдена в [21]. В [22] оценка собственной частоты колебаний статически определимой пространственной фермы также получена в системе Maple методом индукции.

2 Materials and Methods

2.1 Конструкция фермы и усилия в стержнях

Рассматриваемая ферма представляет собой плоскую балочную конструкцию с ромбовидной сеткой и двумя опорами (рис. 1). Ферма имеет подвижную шарнирную опору A и неподвижную шарнирную опору B . Длина пролета фермы $L = 2a(2n - 1)$, где n — количество панелей в половине пролета. Количество внутренних шарниров $4n + 3$. Число стержней, включая три опорные, $v = 8n + 6$. Замкнутую систему уравнений для определения усилий в стержнях и реакций опор статически определимой конструкции можно получить, записав по два уравнения равновесия для каждого узла. Это необходимо как для решения задачи о прогибе, так и определения частоты колебаний в аналитическом виде.

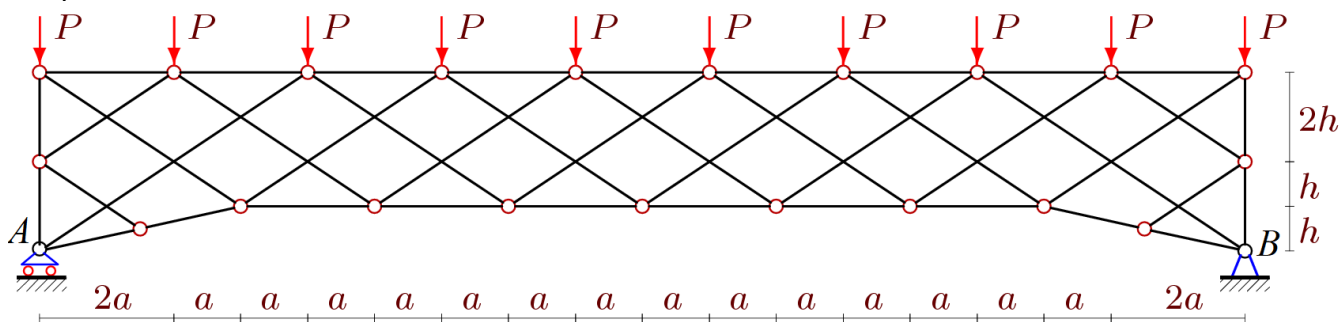


Рис. 1 - Схема фермы с равномерно распределенной нагрузкой по верхнему поясу, $n=5$
 Fig. 1 -Truss scheme with a uniformly distributed load along the upper chord, $n=5$

Для расчета силы в стержнях используется программа, написанная в системе компьютерной математики Maple. Координаты узлов и порядок соединения стержней вводятся в программу так же, как в дискретной математике задаются ребра и вершины графа. Нумерация стержней и узлов дана на рисунке 2. Для задания структуры решетки используются специальные упорядоченные списки номеров вершин концов соответствующих стержней. Фрагмент программы, который импортирует координаты в систему Maple для произвольного числа панелей n имеет вид:

```
> L0:=2*a*(2*n-1); # span length
> x[1]:=0:y[1]:=0: x[2]:=3*a/2:y[2]:=h/2:
> for i to 2*n-3 do x[i+2]:=2*(i-1)*a+3*a; y[i+2]:=h; end:
> x[2*n]:=L0-3*a/2: y[2*n]:=h/2:
> x[2*n+1]:=L0: y[2*n+1]:=0:
> x[2*n+2]:=0: y[2*n+2]:=2*h:
> for i to 2*n do x[i+2*n+2]:=2*(i-1)*a: y[i+2*n+2]:=4*h:end:
> x[4*n+3]:=L0: y[4*n+3]:=2*h:
> m3:=4*n+6; # total number of nodes
> x[m3-2]:=0: y[m3-2]:=-h:
> x[m3-1]:=L0: y[m3-1]:=-h:
> x[m3]:=L0+a: y[m3]:=0:
```

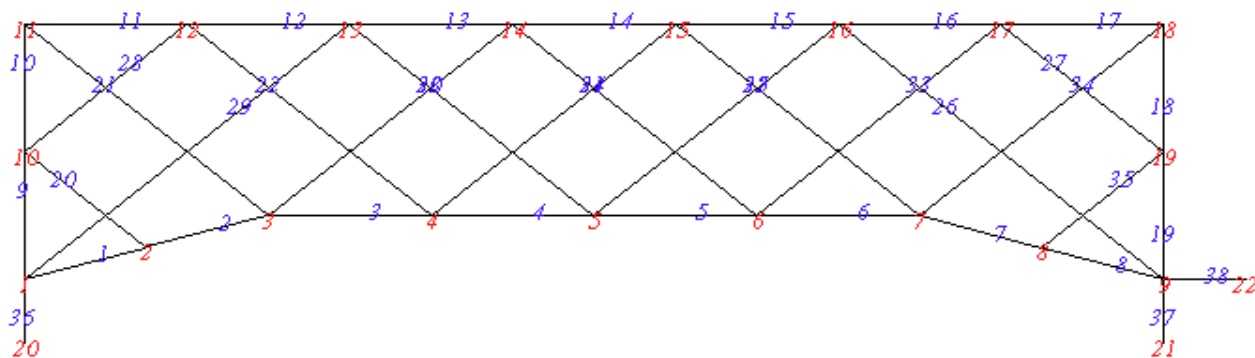


Рис. 2 - Нумерация стержней и узлов, $n=4$. Опоры моделируются стержнями
 Fig. 2 - Numbering of rods and nodes, $n=4$. Supports are modeled by bars

Матрица G системы уравнений равновесия узлов состоит из направляющих косинусов усилий в стержнях и реакций опор. Вектор правой части системы уравнений содержит проекции внешних сил, действующих на узлы. Предположено, что жесткости всех стержней равны. Для расчета перемещений используется формула Максвелла-Мора, учитывающая только продольные деформации стержней.

Пробные расчеты усилий в ферме при действии произвольной нагрузки, например, сосредоточенной в середине пролета, показывают, что при числе панелей, кратном трем, определитель матрицы G обращается в ноль независимо от нагрузки и размеров фермы. На рисунке 3 приведена диаграмма распределения возможных скоростей узлов при $n=3$. Картина симметричная и не противоречит необходимому кинематическому условию: проекции векторов скоростей концов стержня на направление стержня равны. Стержни 1-2, 1-8, 8-2 и 6-7, 15-7, 6-15 вращаются вокруг опор 1 и 7 соответственно. Вращения совершают стержни 8-10, 9-10, 8-9 и им симметричные вокруг мгновенных центров скоростей 9 и 14. Стержни 10-4 и 4-13 получают поступательные движения. Очевидна связь скоростей: $v/a = u/h = 4v'/\sqrt{9a^2 + h^2}$. Аналогичную картину можно получить и при $n=6, 9, 12, \dots$ Случаи кинематического вырождения некоторых плоских ферм приведены также в справочнике [12].

Таким образом, все расчеты рассматриваемой фермы необходимо выполнять для чисел панелей, не кратных трем. Для этого вводится замена переменной:

$$n = (6k - (-1)^k - 3) / 4, k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

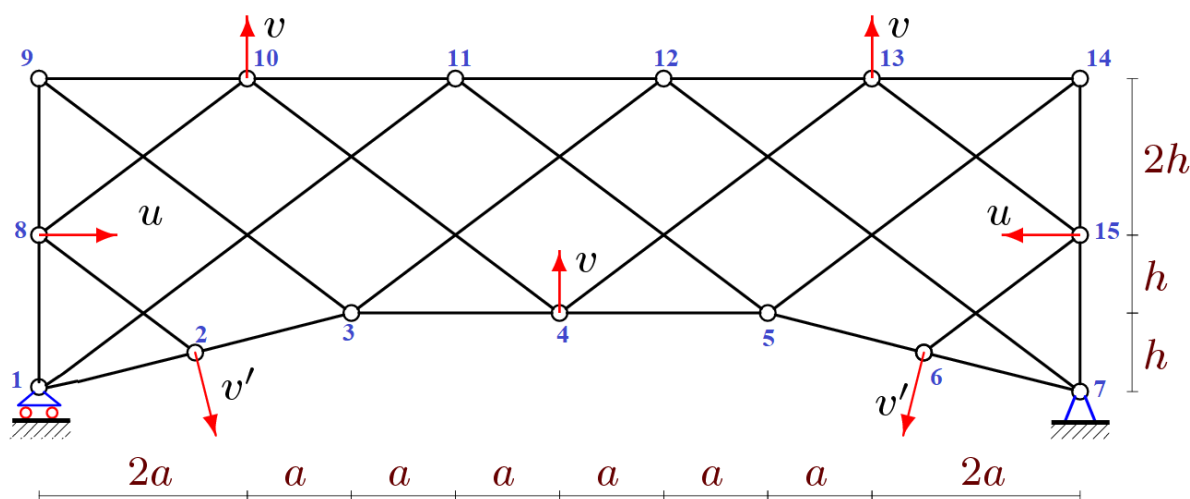


Рис. 3 - Возможные скорости мгновенно изменяемой фермы при $n=3$
 Fig. 3 - Possible velocities of an instantaneous truss with $n=3$

Для расчета прогиба используется интеграл Максвелла-Мора в виде:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{v-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF), \quad (2)$$

где $S_i^{(P)}$ – усилие в стержне i от действия нагрузки, $S_i^{(1)}$ – усилие от единичной (безразмерной) вертикальной силы, приложенной к узлу C , в котором вычисляется прогиб, E и F – модуль упругости и площадь сечения стержней, l_i – длина стержня.

2.2 Вычисление частоты колебаний

Первая частота собственных колебаний рассчитывается по методу Донкерлея. Инерционные свойства фермы моделируются массами, расположенными во всех $K = 4n + 3$ узлах фермы. Принимается, что массы совершают вертикальные колебания, горизонтальными движениями узлов пренебрегаются. Таким образом, число степеней свободы исследуемой системы масс равно числу узлов: $K = 4n + 3$.

Динамические уравнения системы масс в матричной форме записываются следующим образом:

$$mI_K \ddot{Y} + D_K Y = 0. \quad (3)$$

Здесь Y – вектор вертикальных смещений масс в узлах фермы, \ddot{Y} – вектор ускорений, I_K – единичная матрица, D_K – матрица жесткости. В случае гармонических колебаний с частотой ω справедлива связь $\ddot{Y} = -\omega^2 Y$. Матрицей, обратной к матрице жесткости D_K , является матрица податливости B_K . Элементы этой матрицы вычисляются с помощью формулы Максвелла - Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^v S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF). \quad (4)$$

Введены стандартные обозначения: $b_{i,j}$ – перемещение узла i от действия единичной вертикальной безразмерной силы, приложенной к узлу j , $S_{\alpha}^{(i)}$ – усилия в стержнях с номерами α от действия единичной силы, приложенной к узлу i , где расположена масса m по направлению движения массы, l_{α} – длина стержня с номером α , EF – продольная жесткость, принятая для всех стержней одинаковой.

Умножением уравнения (3) на матрицу B_K , задача сводится к проблеме собственных значений матрицы B_K : $B_K Z = \lambda Z$, где $\lambda = 1/(\omega^2 m)$ – собственные числа матрицы B_K . Приближенное аналитическое решение для нижней оценки ω_D первой частоты ω_1 разыскивается по формуле Донкерлея:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}, \quad (5)$$

где ω_p – парциальные частоты, рассчитанные для каждой массы отдельно.

Для расчета парциальных частот уравнение движения массы имеет вид:

$$m \ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (6)$$

Коэффициент жесткости D_p , обратный к коэффициенту податливости, вычисляется по формуле Максвелла - Мора:

$$\delta_p = 1/D_p = \sum_{\alpha=1}^v (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF). \quad (7)$$

Фактически в такой постановке вычисляются только диагональные элементы матрицы B_K . Из формулы Донкерлея (5) следует выражение для частоты:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_n. \quad (8)$$

3 Results and Discussion

3.1 Расчет усилий и расчет прогиба

По результатам расчетов в программе Maple получают усилия в элементах фермы в аналитическом виде, что необходимо для вывода формулы для прогиба и нижней оценки собственной частоты. На диаграмме (рис. 4) красные стержни растягиваются, синие — сжимаются. Толщина линий условно пропорциональна модулям сил в соответствующих стержнях. Величина усилия, отнесенная к узловой нагрузке P , округлена до двух значащих цифр. Для расчетов были взяты размеры $n=4$, $a = 3\text{ м}$, $h = 1\text{ м}$. Как и ожидалось, наиболее растянутые стержни оказались в середине пролета. Наиболее сжатым стержнем является средний стержень верхнего пояса.

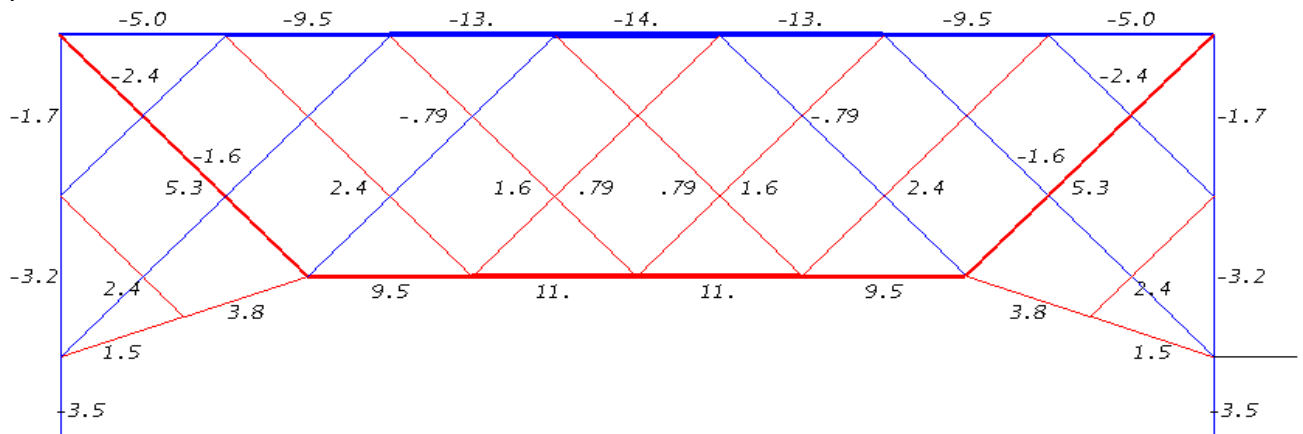


Рис. 4 - Распределение усилий, нагрузка по нижнему поясу, $n=4$
Fig. 4 - Distribution of forces, load on the lower belt, $n=4$

Усилия трех опорных стержней при вычислении прогиба не входят в сумму (2), поскольку они условно приняты недеформируемыми. Последовательный расчет прогиба плоской рамы с нагруженным верхним поясом для разных чисел панелей ($k = 1, 2, \dots$) дает следующие результаты:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= P(22h^3 + 3c^3) / (3h^2EF), \\ \Delta_2 &= P(440a^3 + 57c^3 + d^3 + 76h^3) / (9h^2EF), \\ \Delta_3 &= P(144a^3 + 9c^3 + 17h^3) / (h^2EF), \\ \Delta_4 &= P(5776a^3 + 168c^3 + 2d^3 + 131h^3) / (9h^2EF), \dots \end{aligned}$$

С помощью системных операторов Maple вычисляются общие члены полученной последовательности коэффициентов при степенях размеров фермы: a^3, c^3, h^3 , где $c = \sqrt{h^2 + a^2}$, $d = \sqrt{h^2 + 9a^2}$. Из формулы следует, что зависимость прогиба от числа панелей и размеров конструкции имеет вид:

$$\Delta_n = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3) / (h^2EF), \quad (9)$$

где

$$C_1 = (270k^4 - 180((-1)^k + 5)k^3 + 18(25(-1)^k + 59)k^2 - 8(31(-1)^k + 77)k - 103(-1)^k + 103) / 144,$$

$$C_2 = (18k^2 - 4(2(-1)^k + 1)k - (-1)^k - 23) / 24,$$

$$C_3 = ((-1)^k + 1)k + (-1)^k - 1) / 36,$$

$$C_4 = (2(16(-1)^k + 71)k - 29(-1)^k - 55) / 36.$$

Точно так же при нагружении нижнего пояса плоской рамы получаются коэффициенты:

$$C_1 = (270k^4 - 90(2(-1)^k + 1)k^3 + 90(5(-1)^k + 13)k^2 - 4(71(-1)^k + 199)k + 175(-1)^k + 257) / 144,$$

$$C_2 = (18k^2 - 4(2(-1)^k + 1)k + 19(-1)^k - 31) / 24,$$

$$C_3 = (4(1 - (-1)^k)k + 5(-1)^k - 5) / 144,$$

$$C_4 = (2(16(-1)^k + 71)k - 13(-1)^k - 101) / 36.$$

На рис. 5 полученное решение для безразмерного прогиба в случае распределенной нагрузки по верхнему поясу представлено в зависимости от числа панелей для Δ' :

$$\Delta' = \Delta_k EF / (P_{sum} L), \quad (10)$$

где фиксирована суммарная нагрузка $P_{sum} = 2nP$ и длина пролета $L = 2a(2n - 1) = 60m$.

Аналитическая форма решения в системе Maple позволяет найти асимптоту решения по числу панелей:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k = h / (2L).$$

Угол наклона асимптоты положительный, следовательно, с ростом числа панелей относительный прогиб фермы растет. Минимум прогиба приходится на число $k=3$, соответствующее согласно (1) $n=4$ и длине панели $a = L / 14 = 4,3 m$. Кривые, построенные для разных высот, не пересекаются. Это означает, что для ферм разной высоты при определенном количестве панелей относительные прогибы неодинаковы. Для больших значений числа панелей кривые почти горизонтальны. Относительный прогиб почти не зависит от числа панелей.

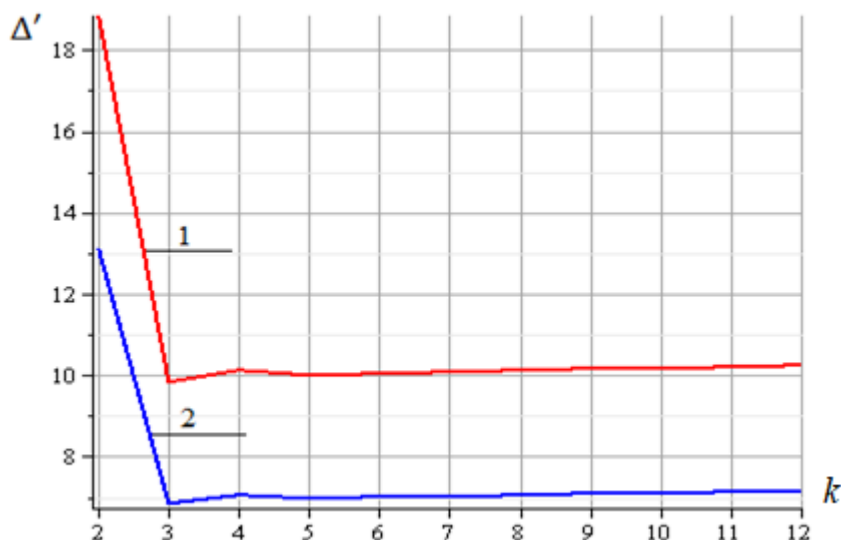


Рис. 5 - Безразмерный прогиб фермы в зависимости от числа панелей, 1 - $h = 1m$; 2 - $h = 1,2m$

Fig. 5 - Dimensionless truss deflection depending on the number of panels, 1 - $h = 1m$; 2- $h = 1.2m$

Наименьший прогиб наблюдается как для фермы высотой $h=1м$, так и для фермы высотой $h=1,2м$ при $k=3$. Предсказуема и зависимость прогиба от числа панелей при разных высотах h : чем меньше высота, тем больше прогиб. Судя по формуле (9), эта зависимость сильно нелинейная: высота h стоит в знаменателе.

3.2 Первая частота собственных колебаний по методу Донкерлея

Расчет серии ферм с разным числом панелей показал, что коэффициент Δ_k имеет вид, не зависящий от параметра k :

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= (1572a^3 + 4035c^3 + 59d^3 + 5228h^3) / (144h^2EF), \\ \Delta_3 &= (339052a^3 + 323511c^3 + 2459d^3 + 141860h^3) / (2352h^2EF), \\ \Delta_4 &= (492684a^3 + 282483c^3 + 1683d^3 + 87292h^3) / (1296h^2EF), \\ \Delta_5 &= (34285420a^3 + 10813317c^3 + 46157d^3 + 2274428h^3) / (24336h^2EF), \dots\end{aligned}$$

Свойство сохранения формы решения имеет место для регулярных конструкций. Решение записывается в виде:

$$\Delta_k = (C_1a^3 + C_2c^3 + C_3d^3 + C_4h^3) / (h^2EF).$$

Для нахождения общих элементов полученных последовательностей с помощью операторов системы Maple необходимо найти рекуррентные уравнения, которым они удовлетворяют. В рассматриваемой задаче потребовалось рассчитать двадцать семь ферм. Обратите внимание, что символьные преобразования в Maple намного медленнее, чем численные. Время расчета собственных частот каждой следующей фермы примерно вдвое больше времени расчета предыдущей фермы с меньшим числом панелей. Решение однородных линейных рекуррентных уравнений методами Maple даёт выражения для определения коэффициентов:

$$\begin{aligned}C_1 &= (10368k^6 - 10368(-1)^k + 5)k^5 + 720(60(-1)^k + 229)k^4 - 240(466(-1)^k + 1385)k^3 \\ &+ 72(2310(-1)^k + 5321)k^2 - 2(56486(-1)^k + 118105)k + 28905(-1)^k + 58845) / 360, \\ C_2 &= (19008k^4 - 144(88(-1)^k + 399)k^3 + 6(4661(-1)^k + 11338)k^2 - 2(10667(-1)^k + 18331)k \\ &+ 5577(-1)^k + 7545) / 96, \\ C_3 &= (5328k^3 - 48(73(-1)^k + 143)k^2 + 2(2108(-1)^k + 565)k - 1059(-1)^k + 978) / 36, \\ C_4 &= (1152k^3 - 6(88(-1)^k + 503)k^2 + 4(173(-1)^k + 736)k - 273(-1)^k - 969) / 288.\end{aligned}$$

Окончательно аналитическая оценка нижней частоты по Донкерлею принимает следующий вид:

$$\omega_D^{-2} = m(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3d^3 + C_4h^3) / (h^2EF). \quad (11)$$

3.3 Численное решение

Для иллюстрации найденной зависимости частоты собственных колебаний от количества панелей и для оценки точности аналитического решения нужно найти первую частоту из спектра частот собственных колебаний конструкции.

Для нахождения собственных значений матрицы используется оператор Eigenvalues из пакета LinearAlgebra системы Maple. Рассматриваемая ферма имеет размеры $a=3м$, $h=1м$. Площадь поперечных сечений стержней решетки, поясов и опорных стержней принимается одинаковой: $F=9см^2$. Длина вертикальных опорных стержней h , горизонтального (в правой опоре) — a . Модуль упругости стали $E=2,1 \cdot 10^{11}$ МПа, массы в узлах $m=100кг$. На рисунке 6 представлены кривые зависимости первой частоты ω_1 , полученной численно как низшая частота спектра, и ω_D по формуле (11).

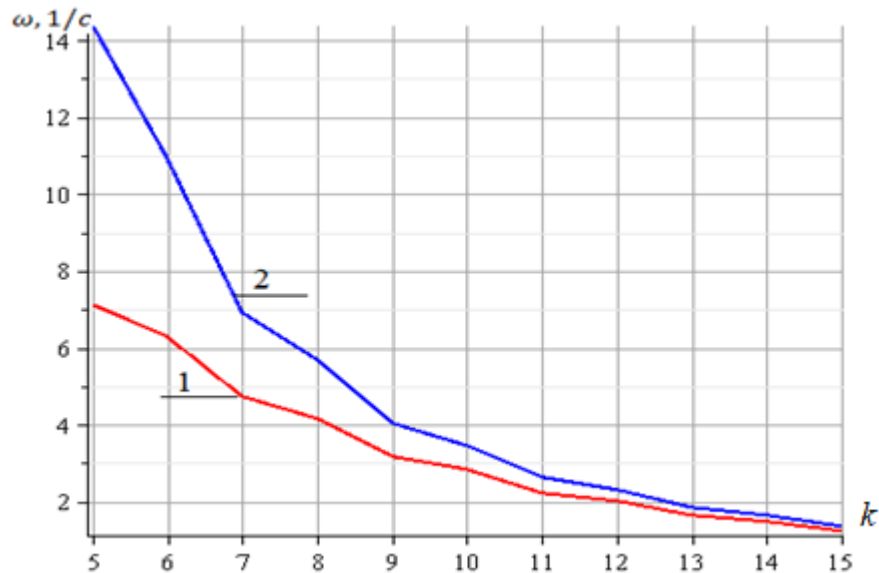


Рис. 6 - Сравнение аналитического решения с численным. 1 – нижняя оценка ω_D по Донкерлею при $a = 3\text{м}$, $h = 1\text{м}$; 2 – частота ω_1 , полученная численно

Fig. 6 - Comparison of the analytical solution with the numerical one. 1 – the lower estimate ω_D according to Dunkerley at $a = 3\text{m}$, $h = 1\text{m}$; 2 - frequency ω_1 obtained numerically

Из графика на рисунке 6 видно, что при увеличении количества панелей увеличивается и длина фермы, частота собственных колебаний монотонно уменьшается. Когда количество панелей невелико, частота собственных колебаний уменьшается более резко. Также видно, что погрешность аналитической оценки в целом невелика и значительно уменьшается с увеличением количества панелей. Отсюда можно сделать вывод, что для решения задач с фермами с большим количеством панелей полученное аналитическое решение наиболее всего подходит. В этом случае с увеличением количества панелей аналитическое решение особенно эффективно, так как время численного счета увеличивается в геометрической прогрессии, точность падает, а точность же аналитического решения только растет, достигая относительной погрешности 9% (рис. 7).

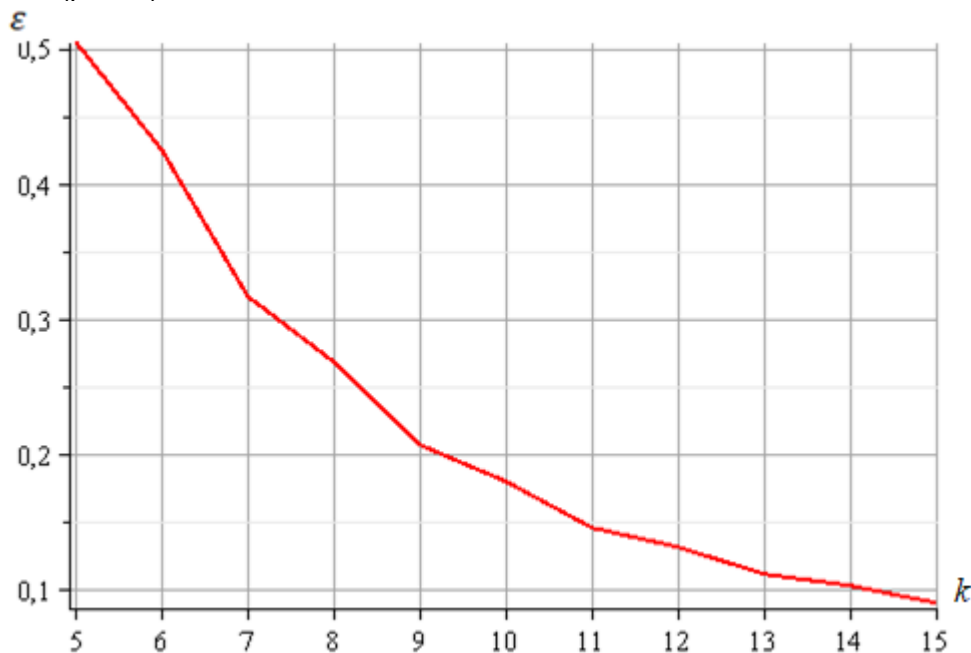


Рис. 7 - Относительная погрешность оценки частоты колебаний по Донкерлею
Fig. 7 - Relative error in estimating the oscillation frequency according to Dunkerley

Для уточнения погрешности решения вводится относительная величина $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$. Изменение этого значения в зависимости от количества панелей показано на рис. 7. С точностью от 9% до 50% аналитическая оценка дает удовлетворительный результат.

3.4 Спектры собственных частот регулярных ферм

На рисунке 8 приведены спектры собственных частот ферм различного порядка, рассчитанные численно. Каждая кривая соответствует ферме порядка от $n=2$ до $n=17$. Точками на кривых отмечены частоты. На кривой $n=2$ расположены точки, соответствующие всем $K = 4n + 3 = 11$ частотам спектра этой фермы, на кривой $n=4$ — 19 точек. По оси абсцисс — номера j точек в спектре. Отмечаются характерные закономерности картины распределения частот в спектрах. Во-первых, все высшие частоты спектров кратные. Во-вторых, рассматриваемая схема фермы имеет спектральные константы — частоты, одинаковые для ферм различного порядка. Для принятых размеров фермы $a = 3\text{м}$, $h = 1\text{м}$, $F = 9\text{см}^2$ таких явно выраженных констант три: $\omega = 560\text{с}^{-1}$, $\omega = 1400\text{с}^{-1}$, $\omega = 1900\text{с}^{-1}$. Наличие этой закономерности позволяет предсказать некоторые (например, высшие) частоты ферм большого порядка регулярности по данным расчетов фермы с небольшим числом панелей. Высшие частоты совпадают. Низшие же частоты спектров также имеют некоторую закономерность, хотя и менее выраженную. Точки частот на кривых спектров выкладываются на почти прямолинейные кривые, угол наклона которых можно также рассчитать по нескольким фермам небольшого порядка. Самая же первая частота имеет достаточно точную аналитическую оценку (11), найденную по формуле Донкерлея.

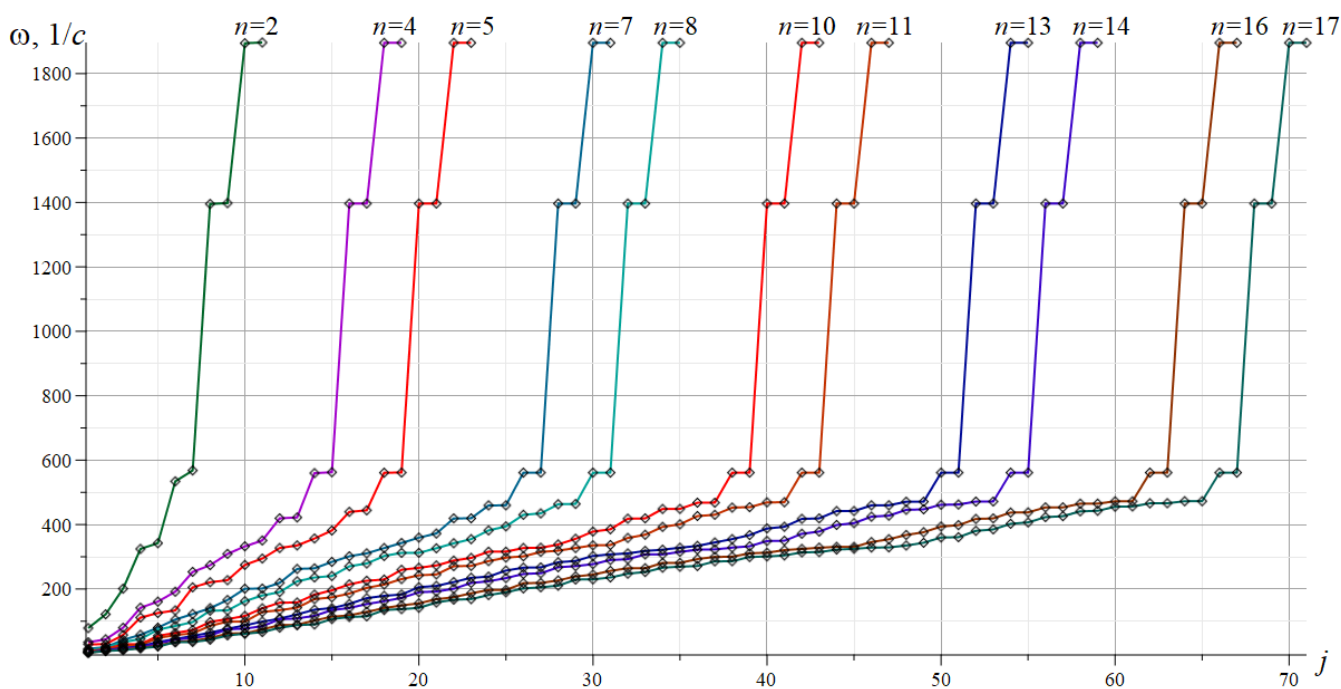


Рис. 8 – Спектры регулярных ферм
Fig. 8 – Spectra of regular trusses

4 Conclusions

Построена математическая модель напряженно-деформированного состояния статически определенной однопролетной плоской фермы с двойной решеткой. Проведен расчет усилий и расчет прогиба фермы. Замечены случаи кинематической изменяемости конструкции при определенном числе панелей. Представлен алгоритм вывода формулы, оценивающей нижнюю

первую собственную частоту колебаний фермы с произвольным числом панелей. Можно сделать следующие выводы:

1. Оценка Донкерлея при произвольном числе панелей компактна и дает приемлемую точность, особенно при достаточно большом числе панелей.
2. Точность аналитической оценки растет с увеличением числа панелей.
3. Обнаружены закономерности распределения частот в спектрах ферм различного порядка.

5 Fundings

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 22-21-00473.

References

1. Lardeur, P., Arnoult, É., Martini, L., Knopf-Lenoir, C. The Certain Generalized Stresses Method for the static finite element analysis of bar and beam trusses with variability. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2012. 50. Pp. 231–242. DOI:10.1016/j.finel.2011.09.013.4
2. Balu, A.S., Rao, B.N. High dimensional model representation based formulations for fuzzy finite element analysis of structures. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2012. 50. Pp. 217–230. DOI:10.1016/j.finel.2011.09.012.
3. Arndt, M., Machado, R.D., Scremin, A. An adaptive generalized finite element method applied to free vibration analysis of straight bars and trusses. *Journal of Sound and Vibration*. 2010. 329(6). Pp. 659–672. DOI:10.1016/j.jsv.2009.09.036.
4. Abdikarimov R., Vatin N., Normuminov B., Khodzhaev D. Vibrations of a viscoelastic isotropic plate under periodic load without considering the tangential forces of inertia // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. № 1(1928). DOI:10.1088/1742-6596/1928/1/012037.
5. Colajanni P., La Mendola L., Latour M., Monaco A., Rizzano G. FEM analysis of push-out test response of Hybrid Steel Trussed Concrete Beams (HSTCBs) // *Journal of Constructional Steel Research*. 2015. 111. Pp. 88–102. DOI:10.1016/j.jcsr.2015.04.011.
6. Vatin, N., Havula, J., Martikainen, L., Sinelnikov, A.S., Orlova, A. V., Salamakhin, S. V. Thin-walled cross-sections and their joints: Tests and FEM-modelling. *Advanced Materials Research*. 2014. 945–949. Pp. 1211–1215. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMR.945-949.1211.
7. Khodzhaev, D., Abdikarimov, R., Vatin, N. Nonlinear oscillations of a viscoelastic cylindrical panel with concentrated masses. *MATEC Web of Conferences*. 2018. 245. DOI:10.1051/mateconf/201824501001.
8. Khatibinia, M., Naserlavi, S.S. Truss optimization on shape and sizing with frequency constraints based on orthogonal multi-gravitational search algorithm. *J. Sound Vib*. 2014. 333(24). Pp. 6349–6369
9. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. Microarchitected cellular solids - The hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005. 85(9). Pp. 607–617. DOI:10.1002/zamm.200410208.
10. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. 54(4). Pp. 756–782. DOI:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
11. Kirsanov, M. N., Tinkov, D. V. Formulas for calculating the frequency spectrum of natural oscillations of a beam truss with an arbitrary number of panels. *Postulat*. 2019. (3). URL: <http://vuz.exponenta.ru/1/tp.pdf>.
12. Kirsanov, M. *Planar Trusses: Schemes and Formulas*. Newcastle upon Tyne, GB, Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, 2019. ISBN:1527535312.
13. Terze S.V. Analytical calculation of the dependence of deformations of the cantilever rack on the number of panels in the Maple system. *Structural mechanics and structures*. 2020. No. 2 (25). Pp. 16-24.
14. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2021. No. 2 (29). Pp. 29-37.
15. Ovsyannikova V.M. Dependence of the deflection of a flat outwardly statically indeterminate truss on the number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2020. No. 4 (27). Pp. 16-25
16. Sud I. B. Formulas for the deflection of a trussed beam truss with an arbitrary number of panels.

Kirsanov, M.; Luong C.L.

Deformations and natural frequency spectrum of a planar truss with an arbitrary number of panels; 2022; AlfaBuild; 25 Article No 2507. doi: 10.57728/ALF.25.7

- Structural mechanics and structures. 2020. No. 2 (25). Pp. 25-32.
17. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101 Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1.
 18. Petrenko V.F. Evaluation of the natural frequency of a two-span truss, taking into account the rigidity of the supports. *Structural mechanics and structures*. 2021. No. 4 (31). Pp.16-25. DOI 10.36622/VSTU.2021.31.4.002.
 19. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. *Magazine of Civil Engineering*. 2022.111(3). Article No. 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14.
 20. Petrichenko E.A. The lower limit of the frequency of natural vibrations of the Fink truss. *Structural mechanics and structures*. 2020. No. 3 (26). Pp. 21-29.
 21. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020 Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4.
 22. Kirsanov M.N. Model and analytical calculation of the truss of a spatial hexagonal dome. *Structural mechanics and structures*. 2022. No. 1 (32). Pp. 39-47. DOI 10.36622/VSTU.2022.32.1.003.