

# Квадратичное приближение в нелинейной теории стержней

В.В. Лалин<sup>1</sup>, Е.А. Мящикова<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Петербургский политехнический университет Петра Великого, 195251, Россия, г. Санкт-Петербург,

Политехническая ул., 29

Информация о статье      УДК 69.04

## Аннотация

*В настоящей работе рассматривается нелинейная теория упругих стержней – Коссера-Тимошенко. В такой теории учитываются деформации изгиба, сдвига и растяжения-сжатия, а на величины перемещений и поворотов не накладывается никаких ограничений. Приведена постановка нелинейной задачи для физически линейного стержня. В данной работе получены уравнения квадратичного приближения для нелинейной теории стержней. Приведена вариационная постановка задачи о поиске точки стационарности функционала типа Лагранжа для квадратичного приближения. В статье показана согласованность уравнений квадратичного приближения с вариационной постановкой задачи. Получены граничные условия для квадратичного приближения. В результате в настоящей работе приведены две постановки нелинейных задач квадратичного приближения – дифференциальная и вариационная. Приведены примеры решения нелинейных задач*

Ключевые слова: нелинейная теория стержней, теория стержней Коссера-Тимошенко, вариационная постановка, геометрически точная теория, функционал вариационной постановки, геометрическая нелинейность, функционал Лагранжа, жесткость стержня.

## Содержание

1. Введение	21
2. Методы	21
3. Результаты и обсуждения	26

### Контактный автор:

1. +7(921)3199878, vllalin@yandex.ru (Лалин Владимир Владимирович, к.т.н., профессор)
2. +7(952)2233615, elena021288@yandex.ru (Мящикова Елена Александровна, студент)

## 1. Введение

В данной работе рассматривается геометрически нелинейная теория стержней. В такой теории стержень моделируется одномерной кривой, которая обладает распределенными инерционными и жесткостными характеристиками. Учитываются деформации изгиба, сдвига и растяжения-сжатия, на величины перемещений и поворотов не накладывается никаких ограничений. В плоской задаче каждая точка такого стержня имеет три степени свободы – две поступательные и одна вращательная. Эта теория называется теорией Коссера-Тимошенко. В зарубежной научной литературе чаще всего используется название – геометрически точная теория [1-14].

Учет всех жесткостей стержня (на растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб) необходим при расчете сильно нагруженных элементов таких сооружений как: высотные многоэтажные здания, морские нефтедобывающие платформы, вытяжные трубы и мачты. В качестве расчетной модели обычно используется линейная теория идеально упругих стержней. Однако необходимо учитывать геометрическую нелинейность, так как большие нагрузки приводят к большим изменениям в геометрии стержня.

Общая нелинейная постановка задач статики и устойчивости стержней и стержневых систем до сих пор не реализована в широко распространенных в проектной практике программных комплексах (таких как SCAD, ЛИРА-САПР и др). Учет геометрической нелинейности в этих комплексах основан на упрощенной постановке, учитывающей только влияние сжимающей силы на изгибную жесткость стержня (так называемый расчет по деформированной схеме). Таким образом, построение более сложных, по сравнению с этой, нелинейных моделей позволит получать в ряде случаев более точное решение.

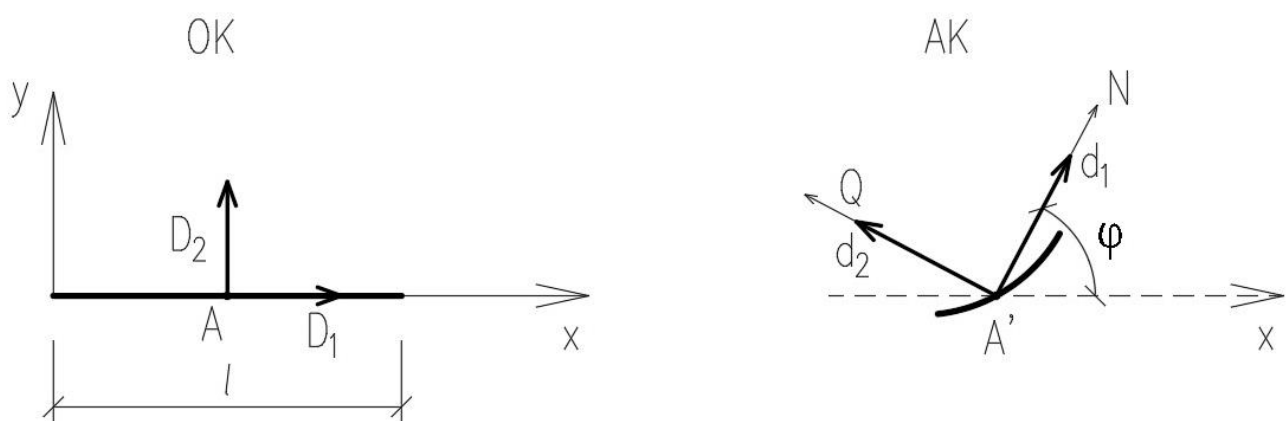
Также в настоящее время в строительстве наблюдается тенденция к уменьшению материалоемкости конструкций. Все больше начинают применять более легкие и податливые конструкции. При этом возрастает вероятность потери устойчивости таких конструкций. Поэтому расчет на устойчивость равновесия является неотъемлемой частью при проектировании несущих конструкций. Но на данный момент расчет устойчивости производится по приближенным методам, которые не точно оценивают реальные напряжения в конструкциях. На данный момент все компьютерные программы, с помощью которых рассчитывают устойчивость конструкций, учитывают либо только жесткость на изгиб по формуле Эйлера, либо жесткость на изгиб и сдвиг по формуле Энгессера. При этом не учитывается жесткость на растяжение-сжатие.

Значительный вклад в развитие нелинейной теории стержней внесли: Елисеев В.В., Жилин П.А., Лалин В.В., Голоскоков Д.П. [15-21]. Достаточно много работ посвящено исследованию в области устойчивости стержней и нелинейному деформированию. [22-25]. Решением задач строительной механики в вариационной постановке занимались авторы работ [26-28].

## 2. Методы

### Постановка задачи

В работе рассматривается первоначально прямой стержень, ось которого направлена вдоль оси  $Ox$ . Деформация стержня происходит в плоскости  $XY$  (рис. 1).  $D_1$  – вектор, направленный по оси стержня,  $D_2$  – вектор, направленный вдоль одной из главных осей инерции сечения стержня в отчетной конфигурации,  $d_1$ ,  $d_2$  – то же в актуальной конфигурации. Вектора  $D_1$  и  $D_2$  сонаправлены с осями  $Ox$  и  $Oy$  соответственно.



**Рис.1. Отчетная и актуальная конфигурации стержня**

Постановка нелинейной задачи для физически линейного стержня включает в себя три группы уравнений (1)-(3) [29].

Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} (N \cdot \cos \varphi - Q \cdot \sin \varphi)' + q_x = 0 \\ (N \cdot \sin \varphi + Q \cdot \cos \varphi)' + q_y = 0 \\ M' + x' \cdot (N \cdot \sin \varphi + Q \cdot \cos \varphi) + y' \cdot (Q \cdot \sin \varphi - N \cdot \cos \varphi) + m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где  $N$  – продольная сила;  $Q$  – поперечная сила;  $M$  – изгибающий момент;  $q_x, q_y$  – проекции распределенных сил на координатные оси  $X, Y$ , соответственно;  $m$  – распределенная моментная нагрузка;  $x(s), y(s)$  – координаты точки стержня в деформированном положении,  $\varphi(s)$  – угол поворота вокруг оси  $Z$ ;  $(...)'$  – частная производная по координате  $s$ .

В отсчетной конфигурации стержень занимает отрезок  $0 < s < l$ , где  $l$  – длина недеформированного стержня.

Геометрические уравнения:

$$\begin{cases} \varepsilon = x' \cdot \cos \varphi + y' \cdot \sin \varphi - 1 \\ \gamma = -x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi \\ \psi = \varphi' \end{cases} \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – деформация растяжения-сжатия,  $\gamma$  – деформация сдвига,  $\psi$  – деформация изгиба.

Физические уравнения для физически линейного материала:

$$\begin{cases} N = k_1 \cdot \varepsilon \\ Q = k_2 \cdot \gamma \\ M = k_3 \cdot \psi \end{cases} \quad (3)$$

где  $k_1 = E \cdot A$  – жесткость на растяжение-сжатие;  $k_2 = G \cdot A \cdot k$  – жесткость на сдвиг;  $k_3 = E \cdot J$  – жесткость на изгиб;  $E$  – модуль продольной упругости;  $G$  – модуль сдвига;  $A$  – площадь поперечного сечения,  $J$  – момент инерции сечения,  $k$  – коэффициент формы сечения.

Общая нелинейная постановка задачи (1)-(3) очень сложная, и, как указывалось во введении, до сих пор не реализована в распространенных программных комплексах. Поэтому требуется найти приближенную более простую постановку, с помощью которой можно получить более простое решение. Необходимо чтобы такое приближенное решение было согласовано с вариационной постановкой задачи, так как решение задач устойчивости, а также метод конечных элементов требуют наличия вариационной постановки.

#### Вывод уравнений квадратичного приближения

В данной работе использован метод квадратичного приближения. Для этого функции  $\cos$  и  $\sin$  были разложены в ряд Маклорена, и оставлены члены со степенью не больше квадрата.

Уравнения квадратичного приближения принимают следующий вид (4)-(6).

Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \left( N \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - Q \cdot \varphi \right)' + q_x = 0 \\ \left( N \cdot \varphi + Q \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right)' + q_y = 0 \\ M' + x' \cdot \left( N \cdot \varphi + Q \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) + y' \cdot \left( Q \cdot \varphi - N \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) + m = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Геометрические уравнения:

$$\begin{cases} \varepsilon = x' \cdot \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + y' \cdot \varphi - 1 \\ \gamma = -x' \cdot \varphi + y' \cdot \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \\ \psi = \varphi' \end{cases} \quad (5)$$

Физические уравнения:

$$\begin{cases} N = k_1 \cdot \varepsilon \\ Q = k_2 \cdot \gamma \\ M = k_3 \cdot \psi \end{cases} \quad (6)$$

Подставим в уравнения (4) уравнения (5) и (6):

$$\begin{cases} \left(k_1 \cdot \varepsilon \cdot \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) - k_2 \cdot \gamma \cdot \varphi\right)' + q_x = 0 \\ \left(k_1 \cdot \varepsilon \cdot \varphi + k_2 \cdot \gamma \cdot \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)\right)' + q_y = 0 \\ k_3 \cdot \psi' + x' \cdot \left(k_1 \cdot \varepsilon \cdot \varphi + k_2 \cdot \gamma \cdot \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)\right) + y' \cdot \left(k_2 \cdot \gamma \cdot \varphi - k_1 \cdot \varepsilon \cdot \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)\right) + m = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Уравнения (7) представляют собой разрешающие нелинейные дифференциальные уравнения относительно трех неизвестных функций  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $\varphi(s)$ . Для окончательной постановки задачи в виде системы дифференциальных уравнений необходимо сформировать граничные условия квадратичного приближения. Эти условия будут получены в дальнейшем из вариационной постановки задачи.

#### Вариационная постановка задачи

Необходимо показать, что вариационная задача поиска точки стационарности функционала Лагранжа равносильна задаче (7). Рассмотрим первоначально прямолинейный стержень (рис. 2). На стержень действует «мертвые» нагрузки: осевая сила  $T$ , параллельная оси  $X$ , перерезывающая сила  $P$ , параллельная оси  $Y$ , и изгибающий момент  $M_{BH}$ ;  $q_x$ ,  $q_y$  – проекции распределенных сил на координатные оси  $X, Y$ , соответственно,  $m$  – распределенная моментная нагрузка.

Понятие «мертвая нагрузка» означает, что нагрузка сохраняет направление и величину при любых деформациях стержня.

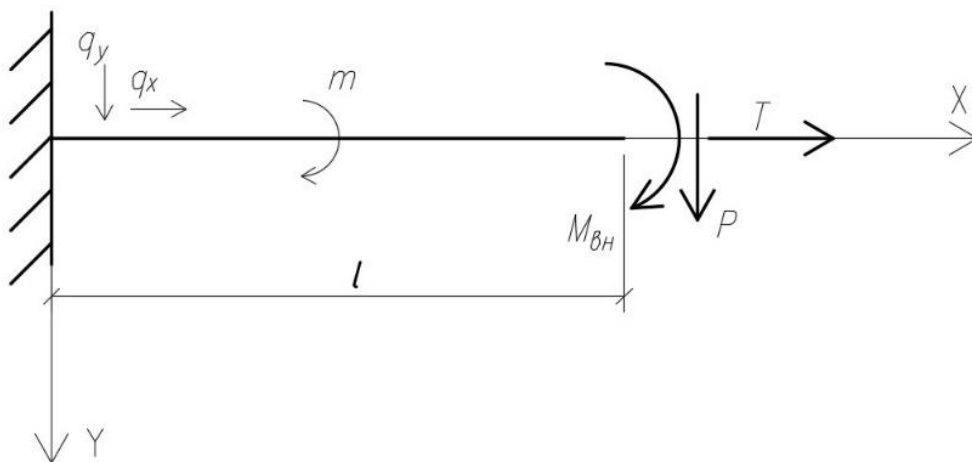


Рис.2. Расчетная схема стержня

Функционал Лагранжа  $L$  записывается в следующем виде:

$$L(x, y, \varphi) = \int_0^l \left( \frac{1}{2} \cdot (k_1 \cdot \varepsilon^2 + k_2 \cdot \gamma^2 + k_3 \cdot \psi^2) - q_x \cdot (x-s) - q_y \cdot y - m \cdot \varphi \right) ds - T \cdot (x(l) - l) - P \cdot y(l) - M_{\text{вн}} \cdot \varphi(l). \quad (8)$$

Вычислим первую вариацию функционала Лагранжа (8):

$$\delta L = \int_0^l \left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \delta \varepsilon + k_2 \cdot \gamma \cdot \delta \gamma + k_3 \cdot \psi \cdot \delta \psi - q_x \cdot \delta x - q_y \cdot \delta y - m \cdot \delta \varphi \right) ds - T \cdot \delta x(l) - P \cdot \delta y(l) - M_{\text{вн}} \cdot \delta \varphi(l). \quad (9)$$

Вычислим вариации деформаций, для этого сначала дадим приращения функциям  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ :

$$x \rightarrow x + \alpha \cdot \delta x, \quad y \rightarrow y + \alpha \cdot \delta y, \quad \varphi \rightarrow \varphi + \alpha \cdot \delta \varphi,$$

где  $\delta x(s)$ ,  $\delta y(s)$ ,  $\delta \varphi(s)$  – вариации координат  $x$ ,  $y$  и угла поворота  $\varphi$  соответственно,  $\alpha$  – числовой параметр.

По определению вариаций [30] необходимо вычислить производную по  $\alpha$  и положить  $\alpha=0$ :

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon &= \frac{d}{d\alpha} \left( (x + \alpha \delta x)' \cdot \left( 1 - \frac{(\varphi + \alpha \delta \varphi)^2}{2} \right) + (y + \alpha \delta y)' \cdot (\varphi + \alpha \delta \varphi) - 1 \right) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \delta x' \cdot \left( 1 - \frac{(\varphi + \alpha \delta \varphi)^2}{2} \right) - (x + \alpha \delta x)' \cdot (\varphi + \alpha \delta \varphi) \cdot \delta \varphi + \delta y' \cdot (\varphi + \alpha \delta \varphi) + (y + \alpha \delta y)' \cdot \delta \varphi \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \delta x' \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - x' \cdot \varphi \cdot \delta \varphi + \delta y' \cdot \varphi + y' \cdot \delta \varphi, \\ \delta \gamma &= \frac{d}{d\alpha} \left( -(x + \alpha \delta x)' \cdot (\varphi + \alpha \delta \varphi) + (y + \alpha \delta y)' \cdot \left( 1 - \frac{(\varphi + \alpha \delta \varphi)^2}{2} \right) \right) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \left( -\delta x' \cdot (\varphi + \alpha \delta \varphi) - (x + \alpha \delta x)' \cdot \delta \varphi + \delta y' \cdot \left( 1 - \frac{(\varphi + \alpha \delta \varphi)^2}{2} \right) - (y + \alpha \delta y)' \cdot (\varphi + \alpha \delta \varphi) \cdot \delta \varphi \right) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= -\delta x' \cdot \varphi - x' \cdot \delta \varphi + \delta y' \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - y' \cdot \varphi \delta \varphi, \\ \delta \psi &= \frac{d}{d\alpha} (\varphi + \alpha \delta \varphi)' \Big|_{\alpha=0} = \delta \varphi'. \end{aligned}$$

Таким образом, первая вариация функционала (9) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\delta L = & \int_0^l \left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \delta x' \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - k_1 \cdot \varepsilon \cdot x' \cdot \varphi \cdot \delta \varphi + k_1 \cdot \varepsilon \cdot \delta y' \cdot \varphi + k_1 \cdot \varepsilon \cdot y' \cdot \delta \varphi \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - \right. \\
& - k_2 \cdot \gamma \cdot \delta x' \cdot \varphi - k_2 \cdot \gamma \cdot x' \cdot \delta \varphi \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) + k_2 \cdot \gamma \cdot \delta y' \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - k_2 \cdot \gamma \cdot y' \cdot \varphi \cdot \delta \varphi \\
& + k_3 \cdot \psi \cdot \delta \varphi' - q_x \cdot \delta x - q_y \cdot \delta y - m \cdot \delta \varphi \Big) ds - T \cdot \delta x(l) - P \cdot \delta y(l) - M_{\text{вн}} \cdot \delta \varphi(l) = \\
= & \int_0^l \left( \delta x' \cdot \left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - k_2 \cdot \gamma \cdot \varphi \right) + \delta y' \cdot \left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \varphi + k_2 \cdot \gamma \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) \right) + \\
& + \delta \varphi \cdot \left( -k_1 \cdot \varepsilon \cdot x' \cdot \varphi + k_1 \cdot \varepsilon \cdot y' \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - k_2 \cdot \gamma \cdot x' \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - k_2 \cdot \gamma \cdot y' \cdot \varphi \right) + \\
& + k_3 \cdot \psi \cdot \delta \varphi' - q_x \cdot \delta x - q_y \cdot \delta y - m \cdot \delta \varphi \Big) ds - T \cdot \delta x(l) - P \cdot \delta y(l) - M_{\text{вн}} \cdot \delta \varphi(l).
\end{aligned}$$

Докажем, что условие  $\delta L = 0$  стационарности функционала Лагранжа равносильно дифференциальной постановке квадратичного приближения. Для этого интегрируем по частям, чтобы избавиться от производных от вариаций:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \delta x' \cdot \left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - k_2 \cdot \gamma \cdot \varphi \right) ds = \delta x \cdot \left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - k_2 \cdot \gamma \cdot \varphi \right) \Big|_0^l - \\
& - \int_0^l \delta x \cdot \left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - k_2 \cdot \gamma \cdot \varphi \right)' ds, \\
& \int_0^l \delta y' \cdot \left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \varphi + k_2 \cdot \gamma \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) ds = \delta y \cdot \left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \varphi + k_2 \cdot \gamma \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) \Big|_0^l - \\
& - \int_0^l \delta y \cdot \left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \varphi + k_2 \cdot \gamma \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right)' ds, \\
& \int_0^l \delta \varphi' \cdot k_3 \cdot \psi ds = \delta \varphi \cdot k_3 \cdot \psi \Big|_0^l - \int_0^l \delta \varphi \cdot (k_3 \cdot \psi)' ds.
\end{aligned}$$

Окончательно после интегрирования по частям первую вариацию можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\delta L = & - \int_0^l \left[ \delta x \cdot \left( \left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - k_2 \cdot \gamma \cdot \varphi \right) + q_x \right) + \delta y \cdot \left( \left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \varphi + k_2 \cdot \gamma \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) + q_y \right) + \right. \\
& + \delta \varphi \cdot \left( x' \cdot \left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \varphi + k_2 \cdot \gamma \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) + y' \cdot \left( k_2 \cdot \gamma \cdot \varphi - k_1 \cdot \varepsilon \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) + k_3 \cdot \psi' + m \right) \Big] ds + \\
& + \left[ \delta x \cdot \left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - k_2 \cdot \gamma \cdot \varphi \right) + \delta y \cdot \left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \varphi + k_2 \cdot \gamma \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) + \delta \varphi \cdot k_3 \cdot \psi \right] \Big|_0^l - \\
& - T \cdot \delta x(l) - P \cdot \delta y(l) - M_{\text{вн}} \cdot \delta \varphi(l).
\end{aligned} \tag{10}$$

Решением вариационной задачи являются функции  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$ , такие, что  $\delta L = 0$  при любых вариациях  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta \varphi$ , удовлетворяющим главным граничным условиям исходной задачи. Из выражения (10) следует, что уравнениями Эйлера вариационной задачи поиска точки стационарности являются уравнения равновесия (7). Таким образом, доказана требуемая равносильность.

### Естественные граничные условия

Главные граничные условия для рассматриваемой задачи:

$$x(0) = y(0) = 0, \varphi(0) = 0.$$

(11)

Найдем вариацию приведенных граничных условий (11). Для этого даем приращения функциям  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ , вычисляем производную по  $\alpha$ , далее полагаем  $\alpha = 0$ :

$$x(0) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (x(0) + \alpha \cdot \delta x(0))|_{\alpha=0} = \delta x(0); \delta x(0) = 0;$$

$$y(0) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (y(0) + \alpha \cdot \delta y(0))|_{\alpha=0} = \delta y(0); \delta y(0) = 0;$$

$$\varphi(0) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (\varphi(0) + \alpha \cdot \delta \varphi(0))|_{\alpha=0} = \delta \varphi(0); \delta \varphi(0) = 0.$$

Из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала слагаемые с  $\delta x(0)$ ,  $\delta y(0)$ ,  $\delta \varphi(0)$  пропадают, и остаются только слагаемые с  $\delta x(l)$ ,  $\delta y(l)$ ,  $\delta \varphi(l)$ . Окончательно, принимая во внимание уравнения (7), вариацию функционала Лагранжа запишем в виде:

$$\delta L = \delta x(l) \cdot \left( \left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - k_2 \cdot \gamma \cdot \varphi \right) \Big|_{s=l} - T \right) + \delta y(l) \cdot \left( \left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \varphi + k_2 \cdot \gamma \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) \Big|_{s=l} - P \right) + \delta \varphi(l) \cdot \left( k_3 \cdot \psi \Big|_{s=l} - M_{\text{вн}} \right).$$

Из условия  $\delta L = 0$  при любых вариациях  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta \varphi$  следует равенство нулю множителей при  $\delta x(l)$ ,  $\delta y(l)$ ,  $\delta \varphi(l)$ . Таким образом, получаем следующие естественные граничные условия:

$$\left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - k_2 \cdot \gamma \cdot \varphi \right) \Big|_{s=l} - T = 0,$$

$$\left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \varphi + k_2 \cdot \gamma \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) \Big|_{s=l} - P = 0, \quad (12)$$

$$k_3 \cdot \varphi' \Big|_{s=l} - M_{\text{вн}} = 0,$$

где  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  даны в формулах (5).

## 3. Результаты и обсуждения

### Примеры решения нелинейных задач

#### Задача 1

Рассмотрим стержень, жестко защемленный с одного конца. На стержень действует сжимающая «мертвая сила»  $T$ , направленная вдоль оси  $X$  (рис. 3).

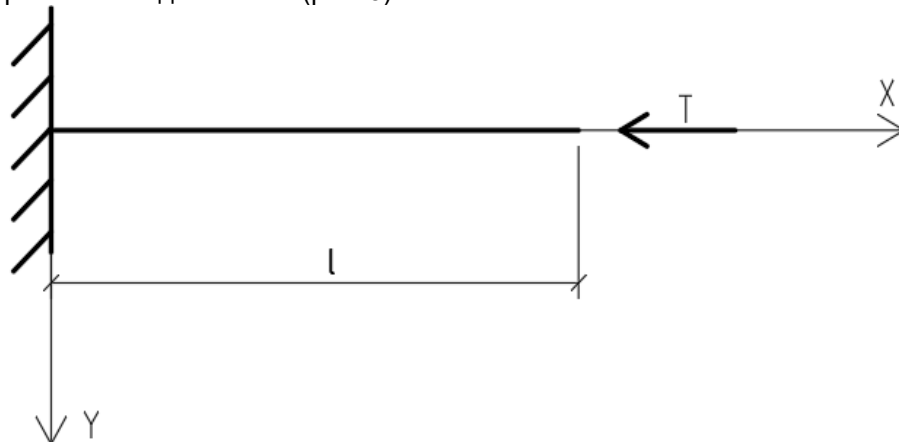


Рис.3. Расчетная схема задачи 1.

Дифференциальные уравнения для данной задачи записываются в виде уравнений (7), где  $q_x = 0$ ,  $q_y = 0$ ,  $m = 0$ .

Граничные условия:

$$s = 0: x(0) = 0, y(0) = 0, \varphi(0) = 0. \quad (13)$$

$s = l$ :

$$\left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - k_2 \cdot \gamma \cdot \varphi \right) \Big|_{s=l} + T = 0, \quad (14)$$

$$\left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \varphi + k_2 \cdot \gamma \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) \Big|_{s=l} = 0, \quad k_3 \cdot \varphi' \Big|_{s=l} = 0,$$

где  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  выражены через  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$  по формулам (5).

Решение поставленной задачи может быть записано в следующем виде:

$$y(s) = 0, \quad \varphi(s) = 0, \quad x(s) = s - \frac{T}{k_1} \cdot s.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функции:  $x(s) = s - \frac{T}{k_1} \cdot s$ ,  $y(s) = 0$ ,

$$\varphi(s) = 0, \quad \varepsilon(s) = -\frac{T}{k_1}, \quad \gamma(s) = 0, \quad \psi(s) = 0, \quad N(s) = -T, \quad Q(s) = 0, \quad M(s) = 0$$

удовлетворяют всем уравнениям (7) и граничным условиям (13), (14). Отметим, что полученное решение задачи, совпадает с решением в полной нелинейной теории стержней [31].

Таким образом, в данной задаче построенное квадратичное приближение позволяет воспроизвести точное нелинейное решение. Данная задача показывает, что квадратичное приближение верно.

### Задача 2

Рассмотрим консольный стержень под действием изгибающего момента  $M$  (рис. 4).

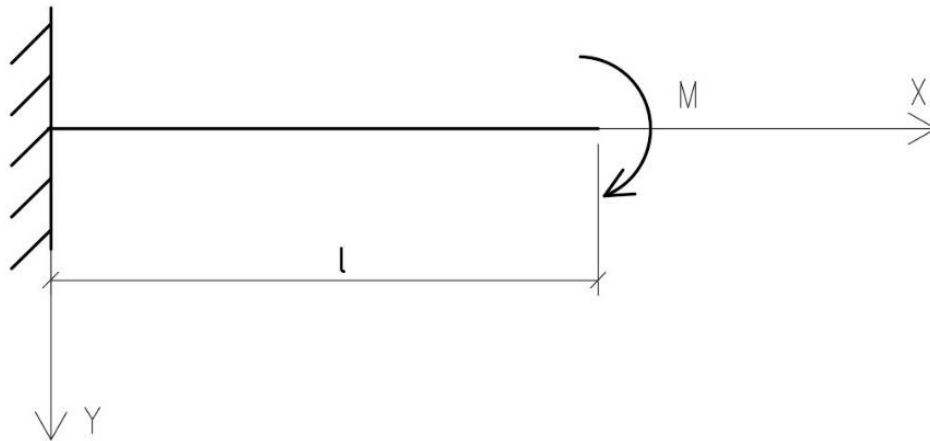


Рис.4. Расчетная схема задачи 2.

Дифференциальные уравнения для данной задачи записываются в виде уравнений (7), где  $q_x = 0$ ,  $q_y = 0$ ,  $m = 0$ .

Граничные условия:

$$s = 0: x(0) = 0, y(0) = 0, \varphi(0) = 0.$$

$s = l$ :

$$\left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - k_2 \cdot \gamma \cdot \varphi \right) \Big|_{s=l} = 0,$$

$$\left( k_1 \cdot \varepsilon \cdot \varphi + k_2 \cdot \gamma \cdot \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) \Big|_{s=l} = 0, \quad k_3 \cdot \varphi' \Big|_{s=l} = M,$$



где  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  выражены через  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$  по формулам (5).

Решение нелинейной задачи квадратичного приближения записывается в следующем виде:

$$\varphi(s) = \frac{M \cdot s}{k_3}, \quad x(s) = \frac{k_3}{2 \cdot M} \cdot \left( \ln \left( \left( \frac{M \cdot s}{k_3} \right)^2 + 2 \cdot \frac{M \cdot s}{k_3} + 2 \right) - \ln \left( \left( \frac{M \cdot s}{k_3} \right)^2 - 2 \cdot \frac{M \cdot s}{k_3} + 2 \right) \right),$$

$$y(s) = \frac{k_3}{M} \cdot \left( \arctg \left( \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{M \cdot s}{k_3} \right)^2 \right) \right), \quad \varepsilon(s) = 0, \quad \gamma(s) = 0, \quad \psi(s) = \frac{M}{k_3}, \quad N(s) = 0, \quad Q(s) = 0, \quad M(s) = M.$$

Точное решение данной задачи имеет следующий вид [32]:

$$\varphi(s) = \frac{M \cdot s}{k_3}, \quad x(s) = \frac{k_3}{M} \cdot \sin \frac{M \cdot s}{k_3}, \quad y(s) = \frac{k_3}{M} \cdot \left( 1 - \cos \frac{M \cdot s}{k_3} \right), \quad \varepsilon(s) = 0, \quad \gamma(s) = 0, \quad \psi(s) = \frac{M}{k_3},$$

$$N(s) = 0, \quad Q(s) = 0, \quad M(s) = M.$$

Линейное решение задачи:

$$\varphi(s) = \frac{M \cdot s}{k_3}, \quad x(s) = s, \quad y(s) = \frac{M}{2 \cdot k_3} \cdot s^2, \quad \varepsilon(s) = 0, \quad \gamma(s) = 0, \quad \psi(s) = \frac{M}{k_3}, \quad N(s) = 0, \quad Q(s) = 0,$$

$$M(s) = M.$$

Для сравнения приближенного, точного и линейного решения задачи построим графики (рис. 5) зависимости прогиба  $y(l)$  на конце стержня от момента  $M$ . В качестве примера возьмем балочный двутавр 20Б1 (длина стержня  $l=5$  м, момент инерции  $I=1943$  см<sup>4</sup>, изгибная жесткость  $k_3=4003$  кН·м<sup>2</sup>). При значении момента  $M=5000$  кН·м прогиб обращается в ноль, что соответствует сворачиванию стержня в кольцо.

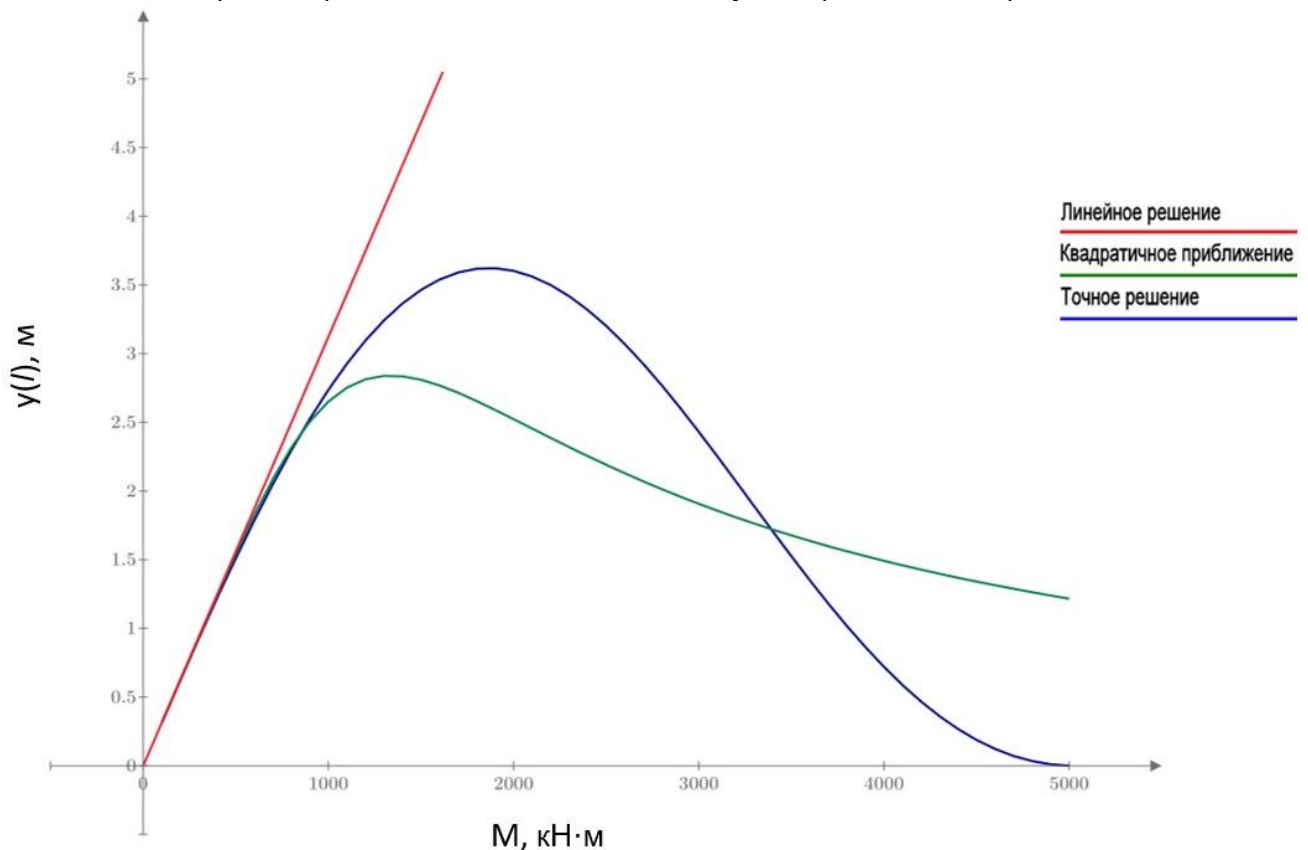
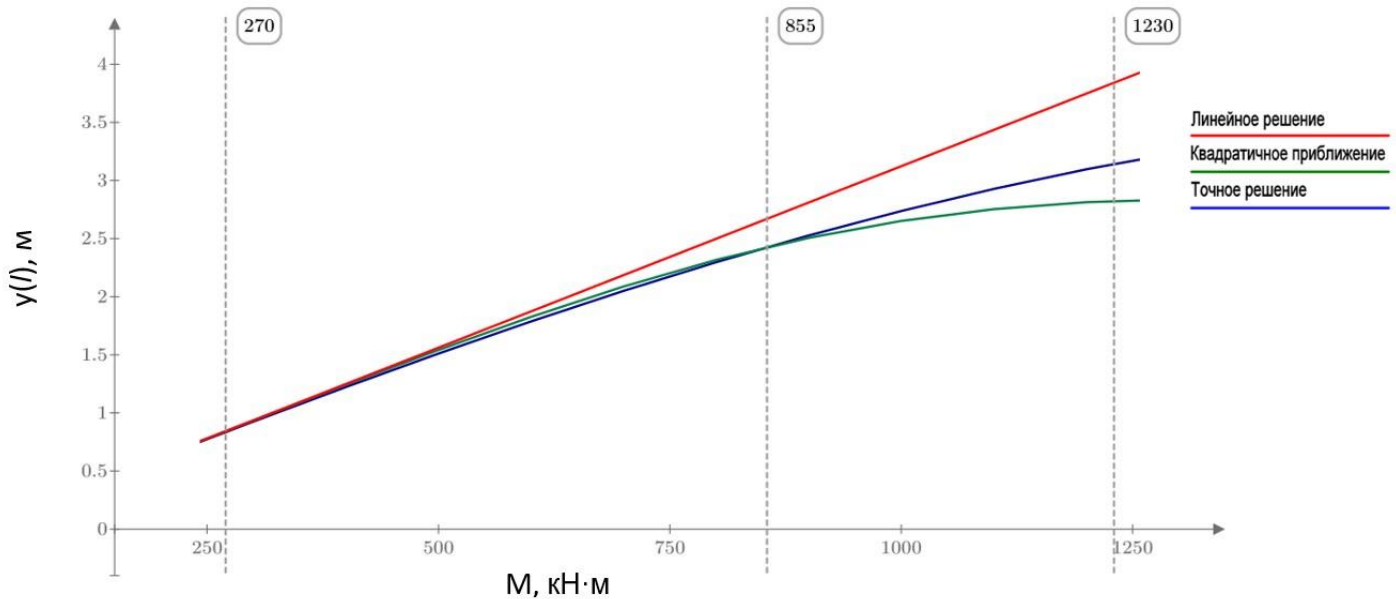


Рис.5. Зависимость прогиба  $y(l)$  от нагрузки.



**Рис.6. Зависимость прогиба  $y(l)$  при моменте от 250 кН·м до 1250 кН·м.**

На рис. 6 в увеличенном масштабе изображены графики, соответствующие моменту от 250 кН·м до 1250 кН·м.

Анализируя графики, представленные на рис. 6, можно сделать следующие выводы:

1. До значения конечного момента 270 кН·м расчет можно вести по линейной теории, результаты решения по всем трем теориям практически совпадают.
2. Разница между линейным и нелинейным решениями начинает превышать 10% при значении момента больше 855 кН·м.
3. При значении момента больше 1230 кН·м разница между точным нелинейным и приближенным нелинейным решениями превышает 10%.
4. Таким образом, при значении момента от 0 до 1230 кН·м расчет можно вести по предложенной в настоящей работе теории квадратичного приближения.

#### 4. Заключение

1. Получены уравнения квадратичного приближения в нелинейной теории стержней.
2. Приведена вариационная постановка задачи о поиске точки стационарности функционала типа Лагранжа для квадратичного приближения.
3. Доказана равносильность дифференциальной и вариационной постановок задач.
4. Получены граничные условия для квадратичного приближения, согласованные с вариационной постановкой.
5. Приведены примеры решения задач, в которых квадратичное приближение сравнивается с линейным и точным нелинейным решениями.

Постановка, полученная в данной работе, может быть использована для построения численного решения нелинейной задачи методом конечных элементов, а также для разработки постановок и алгоритмов численного решения задач устойчивости равновесия.

#### Литература

- [1]. Reddy J.N. An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. Oxford: Oxford University Press. 2004. 482 p.
- [2]. Simo J.C., Tarnow N., Doblare M. Non-linear dynamics of three-dimensional rods: exact energy and momentum conservation algorithms // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1995. Vol. 38. Issue 9. Pp. 1431-1473.
- [3]. Antman S.S. Nonlinear problems of elasticity. Berlin-Heidelberg-New York: Springer. 2005. 835 p.
- [4]. Gerstmayr J., Shabana A.A. Analysis of thin beams and cables using the absolute nodal coordinate formulation // Nonlinear Dynamics. 2006. Vol. 45. No1-2. Pp. 109-130.
- [5]. Jelenic G., Crisfield M.A. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element

#### References

- [1]. Reddy J.N. An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. Oxford: Oxford University Press. 2004. 482 p.
- [2]. Simo J.C., Tarnow N., Doblare M. Non-linear dynamics of three-dimensional rods: exact energy and momentum conservation algorithms // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1995. Vol. 38. Issue 9. Pp. 1431-1473.
- [3]. Antman S.S. Nonlinear problems of elasticity. Berlin-Heidelberg-New York: Springer. 2005. 835 p.
- [4]. Gerstmayr J., Shabana A.A. Analysis of thin beams and cables using the absolute nodal coordinate formulation // Nonlinear Dynamics. 2006. Vol. 45. No1-2. Pp. 109-130.
- [5]. Jelenic G., Crisfield M.A. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element

- for static and dynamics // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1999. Vol. 171. №1-2. Pp. 141-171.
- [6]. Shabana A.A., Yakoub R.Y. Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: theory //ASME Journal of Mechanical Design. 2001. Vol.123. No4. Pp. 606-613.
- [7]. Simo J.C., Vu-Quoc L. A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Geometric and computational aspects // Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering. 1986. Vol. 58. Issue 1. Pp. 79-116.
- [8]. Wriggers P. Nonlinear finite element methods. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. 2008. 566 p.
- [9]. Krenk S. Non-linear modelling and analysis of solids and structures. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 361 p.
- [10]. Shabana A.A. Computational continuum mechanics. Cambridge: Cambridge University Press. 2008. 349 p.
- [11]. Papa E., Jelenic G., Gacesa M. Configuration-dependent interpolation in higher-order 2D beam finite elements// Finite elements in analysis and design. 2014. Vol. 78. Pp. 47-61.
- [12]. Gacesa M., Jelenic G. Modified fixed-pole approach in geometrically exact spatial beam finite elements// Finite elements in analysis and design. 2015. Vol. 99. Pp. 39-48.
- [13]. Xiao N., Zhong H. Non-linear quadrature element analysis of planar frames based on geometrically exact beam theory// Int. J. Non-Lin. Mech. 2012. Vol. 47. Pp. 481-488.
- [14]. Makinen J. Total Lagrangian Reissner's geometrically exact beam element without singularities // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2007. Pp. 1009-1048.
- [15]. Елисеев В.В. Механика упругих стержней. СПб.: СПбГПУ, 1994. 88 с.
- [16]. Елисеев В.В. Механика упругих тел. СПб.: СПбГПУ, 2003. 336 с.
- [17]. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Нестор, 2001. 276 с.
- [18]. Жилин П.А., Сергеев А.Д., Товстик Т.П. Нелинейная теория стержней и ее приложения // Труды XXIV летней школы (Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем). СПб., 1997. С. 313-337.
- [19]. Лалин В.В. Различные формы уравнений нелинейной динамики упругих стержней//Труды СПбГПУ. №489. СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2004. С. 121-128.
- [20]. Лалин В.В., Зданчук Е.В., Кушова Д.А., Розин Л.А. Вариационные постановки нелинейных задач с независимыми вращательными степенями свободы// Инженерно - строительный журнал. 2015. №4. С. 54–80.
- [21]. Голоскоков Д.П., П.А. Жилин. Общая нелинейная теория упругих стержней с приложением к описанию эффекта Пойнтинга // Депонировано ВИНТИ №1912-В87 Деп., 20 с.
- [22]. Nazmeeva T. V., Vatin N. I. Numerical investigations of notched C-profile compressed members with initial imperfections// Magazine of Civil Engineering. 2016. No 2(62). Pp. 92-101.
- [23]. Гарифуллин М. Р., Ватин Н. И. Устойчивость тонкостенного холодногнутого профиля при изгибе// Строительство уникальных зданий и сооружений. 2014. № 6(21). С. 32-57.
- [24]. Мельников Б. Е., Семенов А. С. Многомодельный for static and dynamics // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1999. Vol. 171. №1-2. Pp. 141-171.
- [6]. Shabana A.A., Yakoub R.Y. Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: theory //ASME Journal of Mechanical Design. 2001. Vol.123. No4. Pp. 606-613.
- [7]. Simo J.C., Vu-Quoc L. A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Geometric and computational aspects // Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering. 1986. Vol. 58. Issue 1. Pp. 79-116.
- [8]. Wriggers P. Nonlinear finite element methods. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. 2008. 566 p.
- [9]. Krenk S. Non-linear modelling and analysis of solids and structures. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 361 p.
- [10]. Shabana A.A. Computational continuum mechanics. Cambridge: Cambridge University Press. 2008. 349 p.
- [11]. Papa E., Jelenic G., Gacesa M. Configuration-dependent interpolation in higher-order 2D beam finite elements// Finite elements in analysis and design. 2014. Vol. 78. Pp. 47-61.
- [12]. Gacesa M., Jelenic G. Modified fixed-pole approach in geometrically exact spatial beam finite elements// Finite elements in analysis and design. 2015. Vol. 99. Pp. 39-48.
- [13]. Xiao N., Zhong H. Non-linear quadrature element analysis of planar frames based on geometrically exact beam theory// Int. J. Non-Lin. Mech. 2012. Vol. 47. Pp. 481-488.
- [14]. Makinen J. Total Lagrangian Reissner's geometrically exact beam element without singularities // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2007. Pp. 1009-1048.
- [15]. Yeliseyev V.V. Mekhanika uprugikh sterzhney [Mechanics of elastic rods]. Saint-Peterburg: SPbGPU, 1994. 88 p (rus)
- [16]. Yeliseyev V.V. Mekhanika uprugikh tel [Mechanics of elastic rods]. Saint-Peterburg: SPbGPU, 2003. 336 p. (rus)
- [17]. Zhilin P.A. Vektory i tenzory vtorogo ranga v trekhmernom prostranstve [Vectors and second-rank tensors in three-dimensional space]. Saint - Petersburg: Nestor, 2001.276 p. (rus)
- [18]. Zhilin P.A., Sergeev A.D., Tovstik T.P. Analiz i sintez nelineynykh mekhanicheskikh kolebatelnykh system. Trudy XXIV letney shkoly. [Analysis and synthesis of nonlinear mechanical oscillating systems. Proceedings of 24 summer school]. Saint-Petersburg, 1997. Pp. 313 - 337. (rus)
- [19]. Lalin V.V. Razlichnyye formy uravneniy nelineynoy dinamiki uprugikh sterzhney [Various forms of the equations of nonlinear dynamics of elastic rods]. Trudy SPbGPU. No 489. Saint-Petersburg: Izd-vo SPbGPU, 2004. Pp. 121-128. (rus)
- [20]. Lalin V.V., Zdanchuk E.V., Kushova D.A., Rozin L.A. Variational formulations for non-linear problems with independent rotational degrees of freedom //Magazine of Civil Engineering. 2015. No 4. Pp. 54–80. (rus)
- [21]. Goloskokov D.P., Zhilin P.A. Obshaya nelineynaya teoriya uprugikh sterzhney s prilozheniem k opisaniyu effekta Poyntinga [General nonlinear theory of elastic rods with application to the description of the Pointing's effect]. Deposited VINITI. No. 1912-V87. 20 p. (rus)
- [22]. Nazmeeva T. V., Vatin N. I. Numerical investigations of notched C-profile compressed members with initial

- анализ упругопластического деформирования материалов и элементов конструкций// Научно-технические ведомости СПбПУ. Естественные и инженерные науки. 2007. №49. С. 86-97.
- [25]. Кузнецов С.А., Семенов А.С., Мельников Б.Е. Учет упруго-пластического деформирования материала при исследовании влияния формы области осреднения на величину нелокальных мер напряженно-деформированного состояния// Сборник трудов научной школы академика В.В.Новожилова. Под редакцией Е. П. Колпака (Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела). СПб.: Изд-во АНО "Издательство СПбГУ". 2005. С. 167-178.
- [26]. Lalin V., Rybakov V., Sergey A. The finite elements for design of frame of thin-walled beams // Applied Mechanics and Materials. 2014. Vol. 578-579. Pp. 858-863.
- [27]. Рыбаков В.А. Применение полусдвиговой теории В.И. Сливкера для анализа напряженно-деформированного состояния систем тонкостенных стержней: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.04 / Рыбаков Владимир Александрович. – СПб, 2012. – 184 с.
- [28]. Лалин В.В., Рыбаков В.А., Морозов С.А. Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем// Инженерно-строительный журнал. 2012. Т. 27. № 1. С. 53-57.
- [29]. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория упругих тонких стержней. СПб.: СПбГПУ. 2007. 102 с.
- [30]. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление – М.: GIFML, 1961. 228 с.
- [31]. Лалин В.В., Лалина И.И., Кузнецова Д.А. Доказательство ошибочности классических результатов в теории устойчивости стержня Тимошенко // Материалы XI международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016). – 2016. – С. 356–358.
- [32]. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Т.1. М.:Изд-во СКАД СОФТ, 2010. – 704 с.
- imperfections// Magazine of Civil Engineering. 2016. No 2(62). Pp. 92-101. (rus)
- [23]. Garifullin M. R., Vatin N. I. Buckling analysis of thin-walled cold-formed beams //Construction of Unique Buildings and Structures. 2014. № 6(21). Pp. 32-57. (rus)
- [24]. Melnikov B. E., Semenov A. S. St. Petersburg State Polytechnical University Journal. 2007. №49. Pp. 86-97. (rus)
- [25]. Kuznetsov S.A., Semenov A.S., Melnikov B.E. Sbornik trudov nauchnoy shkoly akademika V.V.Novozhilova. Saint-Peterburg: Izd-vo ANO "Izdatelstvo SPbGU". 2005. Pp. 167-178. (rus)
- [26]. Lalin V., Rybakov V., Sergey A. The finite elements for design of frame of thin-walled beams // Applied Mechanics and Materials. 2014. Vol. 578-579. Pp. 858-863 (rus).
- [27]. Rybakov V.A. Primeneniye polusdvigovoy teorii V.I. Slivkera dlya analiza napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya sistem tonkostennykh stержней: dissertatsia kandidata tekhnicheskikh nauk: 01.02.04 / Rybakov Vladimir Aleksandrovich. – Saint-Petersburg, 2012. – 184 p (rus).
- [28]. Lalin V.V., Rybakov V.A., Morozov S.A. The Finite elements research for calculation of thin-walled bar systems// Magazine of Civil Engineering. 2012. T. 27. № 1. Pp. 53-57 (rus).
- [29]. Zhilin P.A. Prikladnaya mekhanika. Teoriya uprugikh tonkikh stержней. [Applied Mechanics. Theory of thin elastic rods]. Saint - Petersburg: SPbGPU, 2007. 102 p. (rus)
- [30]. Gelfand I.M., Fomin S.V. Variatsionnoye ischisleniye [Calculus of variations]. Moscow: GIFML, 1961. 228 p. (rus)
- [31]. Lalin V.V, Lalina I.I., Kuznetsova D.A. Materialy XI mezhdunarodnoy konferentsii po neravnovesnym protsessam v soplakh i struyakh (NPNJ'2016). – 2016. – Pp. 356–358 (rus).
- [32]. Perelmuter A.V., Slivker V.I. Ustoychivost ravnovesiya konstruktsiy i rodstvennyye problemy [Stability of the equilibrium of structures and related problems]. Vol 1. Moscow: SKAD SOFT, 2010. – 704 p. (rus)

**Лалин В.В., Мякшикова Е.А., Квадратичное приближение в нелинейной теории стержней// Alfabuild. 2018. №3(5). С. 20-32**

**Lalin V., Myakshikova E. The quadratic approximation in nonlinear theory of rods. Alfabuild, 2018, 3(5), Pp. 20-32(rus)**

## The quadratic approximation in nonlinear theory of rods

V. Lalin<sup>1</sup>, E. Myakshikova<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

Article info                      scientific article

### Abstract

*This article is about the nonlinear theory of elastic rods (Cosserat-Timoshenko rods). This theory uses bending stiffness, shear stiffness and tensile-compression stiffness and there are not any limitations for movements and rotations. Equations of quadratic approximation were derived. The variational formulation of problem as the search for the stationary point of the Lagrangian functional for quadratic approximation was given. The coherence of equations of quadratic approximation with variational formulation was approved in this article. The border conditions of this problem for quadratic approximation were given. The examples of solution of the problems in nonlinear theory are given in this article*

### Keywords:

nonlinear theory of rods, theory of Cosserat-Timoshenko's rods, variational formulation, geometrically exact theory, geometrically nonlinearity, Lagrangian functional, stiffness of rods, functional

---

#### Corresponding author

1. +7(921)3199878, vlalin@yandex.ru (Lalin Vladimir, Ph.D., Professor)
2. +7(952)2233615, elena021288@yandex.ru (Myakshikova Elena, Student)